UNIVERSIDADE DE SOROCABA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

ABORDAGENS DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: VALORES DA MATEMÁTICA QUE AS PERMEIAM

Paulo dos Santos

Sorocaba / SP
Dezembro / 2005

Paulo dos Santos

ABORDAGENS DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: VALORES DA MATEMÁTICA QUE AS PERMEIAM

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade de Sorocaba, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Educação.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Ogécia Drigo

Sorocaba / SP
Dezembro / 2005

ABORDAGENS DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: VALORES DA MATEMÁTICA QUE AS PERMEIAM

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade de Sorocaba, Banca Examinadora formada pelos seguintes Professores:

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Ogécia Drigo

Orientadora: ______________________________

____
1º. Exam.: Dr. Dario Fiorentini, UNICAMP

____
2º. Exam.: Dr. Celso João Ferreti, UNISO

Sorocaba, ______ . _______ . _______

Agradecimentos

À Maria Ogécia, orientadora e amiga, que me abriu os olhos para a Educação Matemática.

Aos professores Dario Fiorentini e Celso Ferreti pelas contribuições e sugestões no exame de qualificação.

À minha esposa Eva Maria, pela paciência nos meus momentos de ausência, nas pesquisas de fim de semana.

Aos meus três filhos, Vitor, Fausto e Felipe, pelo incentivo.

Ao Salvador, mais do que amigo, verdadeiro irmão.

Quadro Negro

Quadro negro, bem negro,
mais negro que noite sem lua,
enfeitado com letras brancas...
que correm pela face tua !

Quadro negro, bem negro,
Pareces ter vida que habita
na noite, na solidão, nas trevas,
na amplidão infinita!

Solitário és...e então nas férias?
Abandonado, com saudades
dos alunos, da alegre platéia?

Ficas triste com a melancolia
que mora em tua alma séria!
Triste ficas, quadro de nostalgia!

P. Santos *(ginásio “estadão” -1964)*

Resumo

Esta pesquisa, de caráter predominantemente teórico, busca relatar algumas abordagens da metodologia de Resolução de Problemas no ensino de matemática – metodologia proposta por Polya, modelagem matemática e formulação de problemas - e avaliar o quanto elas contemplam os valores utilitário, formativo, social, cultural e estético da matemática. O objetivo deste estudo é obter indícios de quais valores da matemática permeiam as diferentes abordagens da metodologia de Resolução de Problemas e de explicitar fundamentos teóricos para professores de matemática redimensionarem as suas práticas em aula, notadamente as que envolvem tal metodologia. Para atingir tal objetivo a investigação foi desenvolvida em várias etapas: estudos sobre a metodologia da Resolução de Problemas, no ensino de matemática; estudos sobre a matemática como ciência e análise das diferentes abordagens, tendo como fundamento os valores da matemática explicitados por D'Ambrósio (1993). Nossa análise fez emergir a idéia de que, independentemente das especificidades da metodologia de Resolução de Problemas, os valores da matemática se apresentam com maior ou menor intensidade devido ao contexto construído pelo professor, a partir do texto do problema – quer seja, à primeira vista, matemático ou não. A relevância desta pesquisa está no fato de que ela indica a importância da busca de referenciais teóricos, para o professor, no caso de matemática, principalmente em relação ao (re)pensar na e sobre a sua prática nas salas de aula.

Palavras-Chave: Educação Matemática - Resolução de Problemas - Valores da Matemática.

Abstract

This theoretical research search to expose some approaches of the Resolution of Problems methodology in the mathematics teaching – as proposed by Polya that includes methodologies in mathematical modeling and formulation of problems - and to evaluate if its contemplate the utilitarian, formative, social, cultural and esthetic values of mathematics. The aim of this study was to obtain indicative data of which values of the mathematics permeate the different approaches of the Resolution of Problems methodology and to expose theoretical basis for help mathematics teachers in their practices in class, especially the ones that involve such methodology. In this way, the investigation was performed in the following stages: the Resolution of Problems methodology, the mathematics teaching, and studies on the mathematics as science and analysis of the different approaches (based on D´Ambrósio´s mathematics values – 1993). Our analysis made to emerge the idea that, independently of the specificities of Resolution of Problems methodology, the values of the mathematics come with higher or lower intensity, depending of the context built by the teacher and by the text of the own problem – does not matter if it is, in the beginning, mathematical or not. The relevance of this research is in the fact that it indicates the importance of the theoretical search of references, for the mathematic teacher, mainly with respect to re-building of his practice in the classrooms.

Key-words: Mathematical education - Resolution of Problems - Values of the mathematics

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

POR QUE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS?

Comecei a ministrar aulas de matemática no ensino fundamental (séries finais) e ensino médio, na década de 70. Desde essa época, por influência da minha formação em escola técnica, no nível médio, antes de concluir a licenciatura em Matemática, sempre procurava ensinar matemática utilizando problemas. Geralmente os problemas eram propostos após a apresentação dos assuntos, como aplicação. Nessas aulas, os alunos se mostravam interessados. Eles participavam de forma efetiva das aulas, resolviam os problemas e faziam perguntas.

Também ministrei aulas de Cálculo Diferencial e Integral para cursos de Administração de Empresas e de Ciências Econômicas. Nesses cursos, tal disciplina era desenvolvida de modo tradicional, ou seja, apresentavam-se as definições, as demonstrações dos teoremas e, em seguida, as aplicações. Estas não diferiam de algumas resolvidas como modelo. Mas alguns alunos me perguntavam: "Para que serve a derivada?", ou ainda, "Onde vou usar derivadas na minha futura profissão?" Procurava responder as perguntas dos alunos por meio da resolução de problemas que aplicavam os conceitos desenvolvidos nas aulas.

Na década de 80, como aluno do curso de Engenharia Civil, vivenciei muitas aplicações da Matemática e da Física. Nesta fase, preparava as minhas aulas tomando por base esses conhecimentos.

Os problemas, como um tipo de aplicação dos assuntos apresentados, contribuíam para romper com a monotonia das aulas tradicionais – o professor explica o assunto, dá exemplos, resolve alguns exercícios e propõe que os alunos resolvam outros parecidos com os resolvidos - possibilitando que constatassem a aplicabilidade dos conceitos desenvolvidos nas aulas, na área de administração de empresas ou de economia.

Atualmente, ministro aulas de Cálculo Diferencial e Integral e Matemática Financeira em vários cursos. Tenho encontrado novos livros para indicar como livro-texto para os alunos, adequados para tratar da teoria e aplicação – em forma de problemas – de maneira integrada. Mas mesmo com o auxílio de bons livros e propondo problemas aos alunos(as), que resolvo nas aulas, dialogando com os alunos, percebo que eles têm dificuldades tanto para entender os conceitos de matemática como para resolver os problemas.

E onde estariam as falhas? Não seria ingênuo em afirmar que se as aulas fossem mais elaboradas ou que se talvez eu tivesse um melhor entendimento da metodologia de Resolução de Problemas, daria conta de todas as dificuldades dos alunos(as). Ao analisar minha trajetória, constato que minha experiência no ensino de matemática foi ganhando corpo, por meio de tentativas e erros e também por tomar alguns professores como modelo pois, sob meu olhar, sabiam ensinar matemática. Mas isto não foi suficiente para que as dificuldades de aprendizagem dos alunos fossem amenizadas. Segundo Coll (1999, p.12):

> [...] seja qual for o grau em que influem e são influenciados pela experiência prática cotidiana, os professores, como qualquer profissional cujo desempenho deve contar com a reflexão sobre o que se faz e porque se faz, precisam recorrer a determinados referenciais explicativos, de teorias mais ou menos articuladas e coerentes que surgem como instrumentos úteis para desenvolver seu trabalho, que guiem, fundamentem e justifiquem sua atuação. Para que servem as teorias, senão para interpretar, analisar e intervir na realidade que por meio delas, tenta-se explicar, acentuando-se desse modo o caráter instrumental das explicações teóricas.

Assim, o estudo de teorias envolvendo as práticas em sala de aula – no ensino da matemática – certamente contribuirá para a construção de um novo olhar para estas questões.

Ao me envolver com a metodologia de Resolução de Problemas, metodologia que me interessa de modo especial por vir ao encontro das expectativas em relação ao trabalho do docente em sala de aula, espero ter novos olhares para as questões do ensino dessa matemática. Afinal, que “matemática” se ensina - via Resolução de Problemas?

Por outro lado, os Parâmetros Curriculares Nacionais indicam a Resolução de Problemas como ponto de partida de atividades matemáticas e discutem caminhos para o “fazer matemático” na sala de aula, destacando a importância da História da Matemática e da Tecnologia de Comunicação. Nele está explícito que um dos objetivos do ensino da matemática, no nível médio, é levar o aluno a “utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos” (BRASIL, 1999, p.84).

Mas tal metodologia ainda não é utilizada no ensino básico. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (ensino fundamental e médio), se enfatiza que:

> Os problemas não têm desempenhado seu verdadeiro papel no ensino, pois na melhor das hipóteses, são utilizados apenas como forma de aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente pelos alunos (BRASIL, 1999, p. 40),

ou ainda, que

> [...] a abordagem de conceitos, idéias e métodos sob a perspectiva da Resolução de Problemas -ainda bastante desconhecida da grande maioria- quando é incorporada, aparece como um item isolado, desenvolvido paralelamente como uma aplicação da aprendizagem, a partir de listagens de problemas, cuja resolução depende basicamente da escolha de técnicas ou formas de resolução memorizadas pelos alunos (BRASIL, 1999, p.21-22).

A partir dos anos oitenta, de modo geral, o ensino da matemática para a educação básica demanda como objetivos a aplicação dos conhecimentos matemáticos e sua utilização como instrumento em outras áreas do conhecimento, o que requer a Resolução de Problemas como método de ensino. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 1999, p. 82), menciona-se que:

> A matemática, em seu papel formativo contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcende o âmbito da própria matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de um visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.

Assim, em concordância com a possibilidade da matemática ter o caráter formativo mencionado, certamente, a Resolução de Problemas deve ser entendida como um momento de “fazer matemática”. Não nos cabe agora discutir se ao se desenvolver a capacidade de resolver problemas matemáticos, a capacidade de resolver problemas genuínos – envolvendo situações reais – também se desenvolve, ou ainda, se a capacidade de resolver problemas de outras áreas do conhecimento também se desenvolve. São questões que poderão ser entendidas no transcorrer da investigação.

Mas há de se privilegiar também no ensino de matemática, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais-ensino médio-(p.82), o seu caráter instrumental, no qual tal disciplina deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas de conhecimento, assim como para a atividade profissional.

Se for enfatizado o caráter instrumental da matemática na resolução de problemas, talvez haja maior preocupação - por parte do professor - na diversificação dos contextos dos problemas e na aplicação de algoritmos. Neste caso, as idéias matemáticas ou os tipos de raciocínio envolvidos no “fazer matemática” ficam menosprezados, porque se ensina via algoritmos. Um algoritmo pode ser entendido como um conjunto de passos a serem seguidos pelos alunos, como o executar de uma receita.

O método de Resolução de Problemas pode se apresentar, portanto, sob diferentes metodologias de ensino. O que as diferenciam são as concepções que as subsidiam. Neste caso, explicitamos alguns aspectos da matemática que podem ser contemplados – nas sugestões dos parâmetros curriculares nacionais, o caráter utilitário e formativo. Mas se considerarmos outras concepções – as de caráter mais restrito, como as dos professores e também as de caráter mais amplo, as implícitas nos documentos oficiais, como as resoluções e os Parâmetros Curriculares, as análises se tornam mais complexas.

As idéias de Perrenoud, que também permeiam o cenário educacional, sugerem que se criem situações amplas e abertas de aprendizagem que demandam resolução de problemas. Nas suas palavras:

> As situações de aprendizagem, onde os exercícios clássicos, que apenas exigem a operacionalização de um procedimento conhecido, permanecem úteis, mas não são mais o início e o fim do trabalho em aula, como tampouco a aula magistral. Organizar e dirigir situações de aprendizagem é manter um espaço justo para tais procedimentos. É, sobretudo, despender energia e tempo e dispor das competências profissionais necessárias para imaginar e criar outros tipos de situações de aprendizagem, que as didáticas contemporâneas encaram como situações amplas, abertas, carregadas de sentido e de regulação, as quais requerem um método de pesquisa, de identidade e de resolução de problemas (PERRENOUD, 2000, p.25-26).

Logo, um panorama das abordagens de Resolução de Problemas faz-se necessário. A construção do conhecimento matemático pelo aluno está vinculada à maneira como se aplica tal metodologia. O entendimento do professor sobre os aspectos da matemática que são contemplados em uma abordagem interfere na maneira como ela será aplicada. Pode-se privilegiar o caráter instrumental ou o caráter formativo quando o professor avalia as sugestões dadas nos parâmetros curriculares, por exemplo.

Nesta pesquisa, ao analisarmos as diferentes abordagens de Resolução de Problemas explicitaremos “que matemática se ensina”, ou seja, analisaremos como os valores: utilitário, cultural, formativo e estético podem ser contemplados no ensino da matemática nestas abordagens.

Os valores podem ser contemplados em diversas facetas: na construção do conhecimento matemático em aula, na aplicabilidade e no resgate das origens das idéias matemáticas. No entanto, em uma ou outra pode predominar algum valor. Ao constatar como uma abordagem trata a aplicabilidade da matemática, dimensionaremos, principalmente, o enfoque dado ao valor utilitário; os valores formativo e estético, preferencialmente, estão vinculados ao tratamento dado à construção do conhecimento em aula e os valores cultural e sociológico, está vinculado às origens das idéias matemáticas.

Assim, relatamos os resultados desta pesquisa teórica em vários capítulos, a saber: no Capítulo 1 apresentamos um breve histórico da Resolução de Problemas como campo de investigação em Educação Matemática e as idéias de G. Polya sobre Resolução de Problemas, alguns exemplos - problemas resolvidos por meio dos passos propostos; no Capítulo 2 descrevemos outras abordagens construindo um panorama acrescido com comentários; em seguida, no Capítulo 3, apresentarmos, de modo resumido, as idéias de D’Ambrósio sobre os valores da matemática; no Capítulo 4, analisamos as metodologias apresentadas, os valores da matemática que elas podem abarcar e discutimos abordagens mais recentes de Resolução de Problemas, tais como: o processo e a prática da formulação de problemas e problemas exploratórios.

Para concluir o relato da nossa investigação, em Considerações Finais, mencionaremos as possíveis contribuições desta investigação para o nosso trabalho nas aulas de matemática, bem como tentaremos avaliar nosso caminhar na sua elaboração.

CAPÍTULO 1

1.1 Um Breve Histórico da Resolução de Problemas

Enquanto campo de pesquisa em educação matemática[1], a Resolução de Problemas (abreviadamente RP), para Fiorentini (1994, p. 187-188), começou a ser investigada de forma sistemática, sob a influência das idéias de G. Polya, por volta de 1960, nos Estados Unidos. O mesmo autor menciona que as experiências mais significativas e realizadas antes desta data, entre 1896 e 1904, foram realizadas por J. Dewey, o qual concebia que a prática pedagógica centrada em projetos contribuiria para o desenvolvimento do espírito crítico dos estudantes capacitando-os a contribuir para o desenvolvimento de uma sociedade democrática.

Segundo Lourenço Filho (1978), o pensamento para J. Dewey é um efeito da necessidade de ajustamento do homem ao ambiente físico, ao meio social e aos quadros culturais em que vive e para cujo aperfeiçoamento concorre, logo, não funciona só no abstrato. Na compreensão desse ponto é que reside a base do seu instrumentalismo. Vejamos, sob forma esquemática, os princípios gerais que orientaram o sistema de projetos proposto por Dewey.

a) O pensamento se origina de uma situação problemática, ou seja, para Dewey o pensamento não se dá isolado da ação. É preciso agir para pensar e o próprio pensamento é ação reduzida, mediante construção simbólica. De qualquer modo, o pensamento não se dá por geração espontânea. Em cada caso, há condições que o ensejam e o animam. O ponto de partida do pensamento é uma situação problemática, uma tentativa para um empreendimento. A ação de pensar exige a visão de caminhos diversos ou de alternativas de conduta.

---

[1] Para saber sobre pesquisa em Educação Matemática ver Fiorentini (1994, p. 1-25)

b) O princípio da experiência real anterior, ou seja, as situações anteriores pelas quais tenha passado cada indivíduo são importantes, uma vez que, diante de um problema a resolver, sem qualquer experiência anterior, seria inútil pensar. Em outras palavras: o pensamento nasce da ação e a ação se exerce sobre coisas e situações também reais.

c) O princípio da prova final, ou seja, se o pensamento resulta de uma situação problemática, então, tem como função resolver essa situação. A idoneidade do pensamento, isto é, o seu valor como instrumento que ordena a atividade, deverá ser comprovada. O problema delimita o objetivo, o fim a atingir, condensando assim várias sugestões e hipóteses. Umas serão repelidas e outras aproveitadas. Mas a verificação final deverá existir como fator decisivo para a aquisição de bons hábitos de pensar. Para Dewey (apud LOURENÇO FILHO, 1978), em toda reflexão há movimento em duas direções: um movimento que parte de fatos determinados, parciais, não encadeados e que conduzem a uma situação de compreensão global; em sentido inverso, outro existe que parte desse conjunto sugerido, e que, por isso mesmo que é apenas sugerido, constitui uma idéia. Será preciso voltar aos fatos particulares e ligá-los entre si. O primeiro desses movimentos é indutivo, o segundo, dedutivo. Um ato completo de pensamento deverá abarcar sempre os dois, isto é, implicar na interação fecunda dos dados particulares e das opiniões gerais que esses dados.

d) O princípio da eficácia social, o qual leva a considerar não só o valor prático de nossos atos, mas a sua eficácia na vida social. Agimos no meio social, em face de outras pessoas que são como nós, com suas próprias idéias, propósitos, emoções e sentimentos que apreciamos e julgamos. Mas, eles nos julgam também. Deste modo, não é suficiente uma atitude experimental sobre as coisas e a interação das coisas, mas aprender a agir em comunidade, a nos sentirmos cada qual membro de um grupo, ou de muitos grupos, com eles cooperando.

O sistema de projetos de Dewey, para Lourenço Filho (1978), apresenta uma concepção educativa que não despreza a importância das relações humanas, ao contrário, as toma como um objetivo central. O projeto se distingue do problema escolar, propriamente dito, porque esse problema pode ser inteiramente abstrato e formal. E, na maioria dos casos, assim é apresentado, ocupando a mente dos alunos com símbolos e fórmulas para exercício mecânico. O projeto, ao contrário, precisa exprimir uma situação de vida real, pois o pensamento, como já mencionamos, envolve a ação.

Nele se distinguem quatro elementos característicos: 1) o projeto visa de modo principal a formação do raciocínio aplicado às realidades e não a formação de memória; 2) a informação é buscada segundo as oportunidades para que anime realizações vivas, mediante as quais o educando forme sua experiência e ponha a prova as suas próprias conclusões; 3) a aprendizagem precisa ser feita em ambiente natural que integre capacidades, modos de pensar, sentir e agir; 4) o problema vem sempre antes dos princípios, para que assim se desperte o exercício do pensamento com valor funcional.

Como na vida real, os projetos supõem fontes de informação, colaboração, procura de material adequado, conquistas sucessivas aos obstáculos encontrados. Os projetos não visam apenas atividades manuais. Como a globalização é da essência do sistema, por certo que há expressões variadas em cada assunto, em desenho, construção em madeira ou outro material, e delas o professor devidamente preparado deverá aproveitar-se. Mas há projetos puramente intelectuais e, afinal, não há projeto que não seja intelectual no sentido de que visa sempre a disciplina do pensamento.

Para Kilpatrick, segundo Lourenço Filho (1978), os projetos são separados em quatro tipos: 1) projetos em que o fim seja o de incorporar alguma idéia ou técnica sob a forma de expressão (construir um barco, escrever uma carta, organizar um jogo); 2) em que o fim seja o de experimentar alguma coisa de novo, como ouvir uma história, um trecho de música, apreciar uma pintura; 3) em que o fim seja o de pôr em ordem uma dificuldade intelectual, como descobrir as razões por que certa cidade cresceu mais que outra, ou por que há mais orvalho em certas épocas do ano; 4) em que o fim seja o de obter uma informação, atingir um novo grau de destreza ou conhecimento, como atingir determinado nível na escala de caligrafia, ou conjugar os verbos irregulares.

Dewey não estipulou passos formais nos projetos, para Lourenço (1978), mas reconheceu que há etapas necessárias em cada ato de pensamento integral: recolher os dados do problema, ou os fatos de uma situação; observar e examinar em seguida esses fatos, para situar ou esclarecer a questão proposta; elaborar depois uma hipótese ou solução possível, ou várias, procedendo-se à escolha de uma delas; verificar, enfim, a confirmação da idéia elaborada, por sua aplicação como chave a outras observações ou experiências novas.

No entanto, isto não quer dizer que há passos formais, ou ordem preestabelecida, pois as etapas formais se referem mais ao preparo do assunto pelo professor que à marcha da aprendizagem. Criada a situação problemática, que impele o aluno a conhecer, ele pode iniciar o trabalho por qualquer das etapas, pois voltará atrás, de qualquer modo, sempre que necessário. Assim, o conhecimento representará uma conquista individual. Definido claramente o fim a atingir, estabelecido um objetivo central, típico, o interesse coordenará as noções na medida das necessidades. Como procedimento de ensino, não há, portanto, passos formais no projeto.

Algumas sugestões para o bom caminhar de um projeto, segundo Lourenço Filho (1978):

- **Quem deve propor os projetos?**

Para que os projetos sejam realizados com bons resultados educativos, convirá que sejam propostos pelos próprios alunos. Eles devem emergir dos interesses dos alunos, coordenados pela ação educativa da escola. Nas classes em que as crianças estão habituadas à passividade, não surgem logo as iniciativas. Neste caso, o professor pode, com cuidado, propor problemas. Quando os alunos aprendem a trabalhar, então, inúmeras sugestões podem vir. A atividade de escolhê-los e ordená-los poderão constituir também um projeto. Os projetos podem ser realizados mesmo nas escolas com rígida prescrição dos assuntos por um programa tradicional, uma vez que esses projetos podem ser realizados na forma de atividades extracurriculares.

- **O projeto implica ensino globalizado**

Com os projetos, as disciplinas deixam de ser isoladas, uma vez que problemas reais (não abstratos e internos à disciplina) podem ser resolvidos com aplicação da leitura para busca de informações, do cálculo para verificação de ordem quantitativa, do desenho, de trabalhos manuais e da escrita para registro e expressão, etc.

- **O projeto conduz ao trabalho em comunidade**

Os projetos normalmente levam a trabalho em comunidade, pois a tarefa nunca é de um aluno só, mas de toda a classe ou de grupos. A orientação do professor é fundamental nesta etapa para que o aluno faça as investigações necessárias com um caminho inicialmente planejado por ele e pelos alunos. Se o trabalho é bem conduzido, o esforço de cada aluno é aproveitado, e, toda a classe caminha, passo a passo. A atividade livre é da essência do projeto.

Caminhemos no nosso breve relato.

Na década de 50, para Fiorentini (1994, p. 188), Bloom e Broder questionavam as pesquisas até então desenvolvidas por enfatizarem os resultados obtidos com as soluções, em lugar de valorizar os processos implícitos nas resoluções criativas dos problemas. Eles pesquisaram esses processos, analisando as resoluções de alunos bem sucedidos. Com base em suas pesquisas, defenderiam que o ensino de resolução de problemas, deveria centrar-se no ensino de estratégias para a resolução, pois acreditavam que os hábitos adquiridos para a resolução de problemas poderiam ser alterados ou aprimorados por uma adequada formação e prática. Para Fiorentini (1994, p. 189):

> […] o período que vai de 1962 a 1972, segundo Fernandes (1992), corresponderia àquele que marcaria a transição de uma metodologia de investigação de natureza quantitativa para uma mais qualitativa. Post e Kilpatrick (1968) analisaram os processos utilizados pelos estudantes enquanto resolviam os problemas e Wilson (1968) e Smith (1973), seriam os pioneiros na investigação dos efeitos de diferentes tipos de heurística na capacidade dos alunos para a RP. Greeno (1978) estudou tanto os processos cognitivos envolvidos na compreensão e solução de problemas como as implicações desses resultados na elaboração de programas de ensino. O papel da metacognição, por sua vez, foi estudado por Paper e Shoenfeld.

Em 1980, segundo Onuchic (BICUDO, 1999, p. 204), é editada nos Estados Unidos, uma publicação do *NCTM– National Council of Teachers of Mathematics – Na Agenda for Action: Recommendations of School mathematics of the 1980's*, a qual mencionava que a resolução de problemas deveria ser o foco da matemática escolar para os anos 80 e enfatizava que os educadores deveriam concentrar seus esforços para desenvolver nos estudantes a habilidade de resolver problemas; e, ainda, que a Resolução de Problemas aplica a matemática ao mundo real, atendendo a teoria e a prática das ciências atuais e emergentes, bem como resolvem questões que ampliam as fronteiras da própria matemática e ainda, que era preciso preparar os indivíduos com problemas que eles enfrentariam nas suas carreiras.

Na metade da década de 80, Resolução de Problemas passa a ser um assunto abordado em congressos internacionais e foi também nesta época que, no Brasil, os estudos relacionados ao ensino de resolução de problemas – em dissertações e teses, somente - se iniciaram. Ao analisar quatorze trabalhos Fiorentini (1994, p. 184-241) os classifica em diferentes modalidades, a saber:

- os que investigam habilidades e estratégias cognitivas de sujeitos frente à RP em diferentes contextos;

- os que investigam aspectos relacionados à aprendizagem de resolução de problemas aritméticos restritos à adição e subtração;

- os que focalizam o ensino e a RP como método de ensino de matemática, utilizando ou não o computador;

- os que ensinam estratégias para contribuir para melhorar o desempenho dos alunos na RP e

- os que trabalham a metacognição na RP.

A partir da década de 1990, para Onuchic (in BICUDO,1999, p. 214), as dissertações e teses foram desenvolvidas para a sala de aula e em sala de aula. A autora analisa diversos trabalhos e, como exemplo, um deles teve como objetivo principal apresentar uma proposta de trabalho para a sala de aula visando ao ensino/aprendizagem de números complexos – via Resolução de Problemas - com compreensão e significado, no ensino médio. A resolução de problemas , então, como uma metodologia de ensino passa a ser o enfoque das pesquisas em educação matemática, no Brasil. Por outro lado, tal enfoque reflete uma tendência de reação às receitas prontas e decoradas, com um conhecimento a ser obtido por rotina a caracterizar os estudantes como participantes ativos e os problemas como instrumentos precisos e bem definidos, numa coordenação complexa simultânea de atividades.

Não podemos deixar de mencionar que, para Onuchic (in BICUDO, p. 210), os estudos e as pesquisas em Resolução de Problemas sofreram influências de teorias construtivistas que, em anos recentes, tiveram considerável aceitação na Educação Matemática. Na perspectiva construtivista, o aluno deve ser engajado ativamente na construção de seu próprio conhecimento. Construtivismo e teorias de processamento de informação são as teorias mais usadas para se tirar implicações sobre o modo de pensar dos alunos. Essas teorias incorporam a idéia de que os alunos não são recipientes vazios a serem preenchidos com pedaços não relacionados de informação, mas que antes, devem ser vistos como seres pensantes capazes de interpretar e de se lembrar de fatos baseados em seu conhecimento e em suas experiências passadas.

Menciona também que são características de um ensino de matemática construtivista: construir sobre um conhecimento prévio, enfatizar sobre o pensar, dar tempo para pensar, esperar por explicações ou justificativas para as respostas ou pelo modo de pensar, fazer perguntas e saber ouvir, reconhecer que matemática é “parte invenção” e “parte convenção”, trabalhar os conceitos e procedimentos matemáticos em termos de resolução de problemas.

A seguir, como exemplo, uma atividade envolvendo números racionais e a razão de ouro.

Os padrões matemáticos refletem, por vezes, os padrões visuais que o olhar humano considera particularmente estéticos. Um exemplo notável desses padrões matemáticos é a *razão de ouro*. Este número foi mencionado no livro VI de *Os Elementos*, de Euclides (300 a.C.).

De acordo como os gregos, a razão de ouro é a proporção ideal entre os lados de um retângulo que mais é agradável à vista. Na arquitetura grega a razão de ouro está sempre presente, inclusive no Partenon. Também a encontramos na natureza: a concha do molusco náutilo cresce formando uma espiral logarítimica, uma curva matemática que cresce em espiral de uma forma que depende da razão de ouro. Ela está presente na arte também. Leonardo da Vinci (1452-1519) a utiliza na “ Mona Lisa” e Paul Cézanne (1839-1906), em “Rapaz de colete vermelho”.

A *razão de ouro* – também chamada razão áurea - **é o número que se obtém quando dividimos uma linha reta em duas partes de tal forma que a razão entre a linha original e a parte maior é igual à razão entre a parte maior e a menor**. Mas, qual é a razão de ouro?

A atividade é proposta para o aluno... como um convite. Vamos desenvolver a atividade com a razão de ouro em várias partes, tal como discriminamos a seguir.

1ª. parte: Encontre a *razão de ouro*, permanecendo atento à definição dada acima (em negrito). Considere que o comprimento do segmento pode ser representado por x unidades (figura 1).

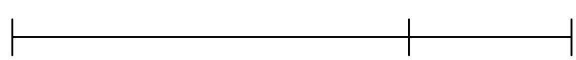

figura 1

2ª. parte: Como verificar se um retângulo é áureo?

Siga as etapas:

1. Pegue duas folhas de papel retangulares e iguais.
2. Tome uma delas e dobre-a, fazendo o lado menor cair sobre o lado maior – observe as figuras.


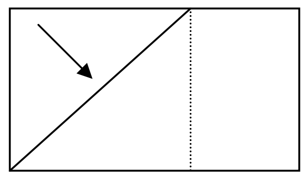
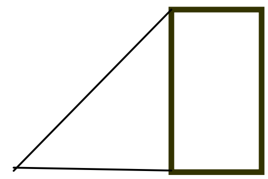

figura 2 figura 3 figura 4

Se os retângulos representados nas figuras 2 e 4 forem semelhantes, então esses dois retângulos serão áureos. Na prática são semelhantes se o maior for ampliação do menor. Observe a figura 5, que pode ser construída com o retângulo não utilizado e com o que você pode recortar na figura 4.

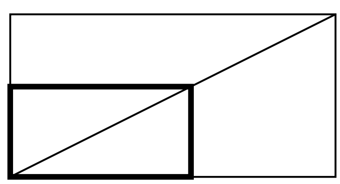

figura 5

3ª. parte: Quais as dimensões de dois retângulos áureos quaisquer? Utilizar x e 1 para representar as medidas de um deles. Quais as dimensões do outro?

Verificar algebricamente que esses dois retângulos são semelhantes.

Sugestão: Observar a 2ª. parte.

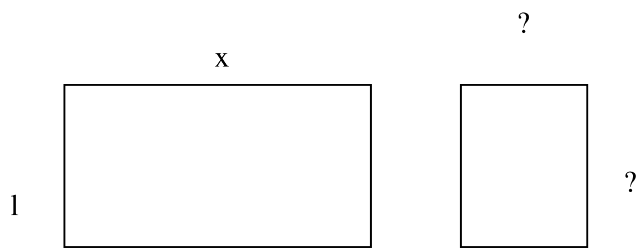

figura 6

4ª. parte: Generalizar, ou seja, enunciar uma regra para se construir retângulos áureos. Dê exemplos de retângulos áureos.

5ª. parte: Construir um retângulo áureo com régua e compasso.

Seguir as etapas:

• desenhar um quadrado;

• centrar a ponta seca do compasso no ponto médio de um dos lados e a outra, no vértice com o lado oposto;

• traçar um arco até encontrar o prolongamento do lado em que está a ponta seca, denominando de P o ponto de interseção deles – do lado com o arco e

• considerando que a medida do lado do retângulo áureo é a metade da medida do lado do quadrado mais a distância do ponto médio desse lado ao ponto P, complete o retângulo.

6ª. parte: Representar algebricamente a construção anterior.

1.2 Comentários

Razão, proporção e propriedades das proporções, teorema de Pitágoras e resolução de equações do 2º grau são assuntos que podem ser desenvolvidos nesta atividade. Eles não precisam ser apresentados na mesma seqüência dos livros didáticos. É interessante o uso de calculadora para o aluno efetuar operações com os números irracionais, uma vez que a passagem da representação na forma fracionária – o entendimento da representação $\frac{a}{b}$, sendo *a* e *b* números inteiros e b não nulo, como quociente - para a forma decimal pode ser feita rapidamente.

Neste caso, os passos são construídos pelo professor, mas o aluno, ao segui-los, poderá considerar seus conhecimentos prévios, esperar por explicações ou por respostas às suas perguntas, saber ouvir os colegas e o professor, trabalhar conceitos e procedimentos matemáticos e ao mesmo tempo descobrir quem é o "número de ouro", por exemplo, ou seja, resolver um problema. De fato, ele resolve um problema, pois o texto em negrito, na página 23, pode ser apresentado como um problema: Qual é o número de ouro sabendo-se que ele é obtido quando dividimos um segmento de reta em duas partes de tal forma que a razão entre o segmento original e a parte maior é igual à razão entre a parte maior e a menor?

Dando continuidade ao breve histórico, acrescentamos que, segundo Pozo (1998, p. 18), os estudos realizados nas últimas décadas pela psicologia cognitiva e educacional, assim como experiências educacionais orientadas para ensinar os alunos a resolver problemas, permitem identificar duas tendências gerais na abordagem da solução de problemas e do seu ensino, a saber: a solução de problemas como uma habilidade geral ou como um processo específico. Na primeira tendência, a solução de problemas se baseia num processo relativamente geral e independente do conteúdo. Na outra, há uma ênfase na dependência do conteúdo.

Deste modo, outro aspecto interessante a se investigar na RP é a questão da possibilidade de transferência da aprendizagem – de técnicas, estratégias ou habilidades – de uma área de estudo para outra e ainda para a vida cotidiana. Voltaremos a esse assunto no Capítulo 2.

1.3 Como resolver problemas, segundo G. Polya?

Segundo G. Polya (1978), na matemática, como disciplina escolar, predominam os problemas. Um problema deve ser entendido uma situação que requer a descoberta de informações — conhecimentos matemáticos, no caso — não conhecidas pela pessoa que tenta resolvê-la, ou ainda, requerem a invenção de demonstrações de resultados matemáticos dados. Para se caracterizar como problema é necessário que a situação demande a invenção de estratégias e a criação de idéias novas, ou ainda, pode-se saber qual é a solução, mas não se conhecer os meios ou como utilizar determinados meios para se chegar à solução.

Há pouco tempo, numa aula de Matemática I, do Curso de Administração de Negócios, na Uniso, onde leciono, propus o seguinte problema: ”Um tijolo pesa 1quilo mais o peso de meio tijolo, quanto pesa um tijolo e meio?” (DANTE, 2000, p. 69). Enquanto os alunos, ainda estavam procurando entender o problema, para possivelmente equacioná-lo, para em seguida resolver a equação, chegando à solução numérica, uma aluna respondeu imediatamente: “Pesa 3 quilos”.

Aparentemente, a aluna chegou à resposta quase que imediatamente e sem dificuldades. Perguntando como ela tinha respondido tão rápido, ela explicou:

“-Se um tijolo pesa 1 quilo mais meio tijolo, a metade de um tijolo pesa 1 quilo, o tijolo inteiro pesa 2 quilos e conseqüentemente, um tijolo e meio pesa 3 quilos.

Os passos propostos por Polya podem também auxiliar os alunos que não conseguiram resolver o problema tão rapidamente como a aluna que mencionamos.

Poderíamos proceder da seguinte maneira:

1º passo: compreensão do problema.

Dado:

- O peso de um tijolo é igual a 1kg mais meio tijolo, o que pode ser representado pela figura 8.

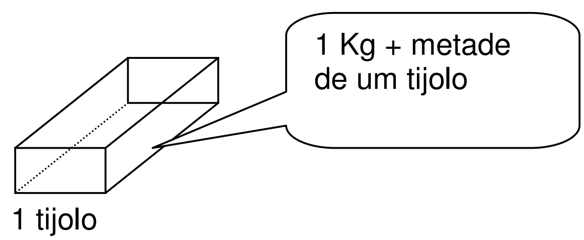

figura 7

Incógnita: peso de 1 tijolo e meio.

2º passo: estabelecimento de um plano

- representar o peso do tijolo por x ;
- representar a sentença do primeiro passo em linguagem simbólica;
- resolver a equação obtida (a sentença expressa uma igualdade) e
- calcular o peso de 1 tijolo mais meio tijolo.

3º passo: execução do plano

Ao ler a sentença expressa pela figura 8, obtemos: $x = 1 + \frac{x}{2}$.

Resolvendo a equação acima obtemos que x = 2 Kg.

Logo, um tijolo mais meio tijolo pesam 3Kg.

4º passo: retrospecto

Neste passo você poderá refazer o problema utilizando a representação do tijolo – o paralelepípedo reto retângulo e sugerir a resposta no próprio desenho (ver figura 9).

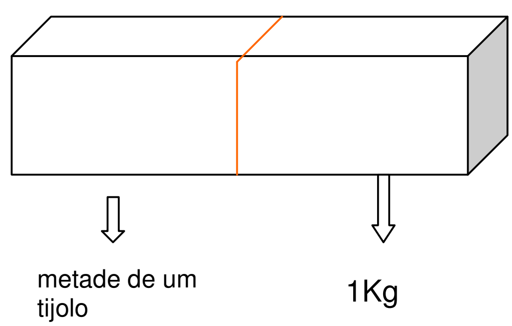

figura 8

Observando a figura o aluno poderá concluir que um tijolo pesa 2 Kg, uma vez que o peso de metade de um tijolo é igual a 1Kg.

Por outro lado, pode-se também enfatizar a importância da álgebra como um instrumental para a resolução de problemas.

Se outros problemas similares fossem apresentados, eles gradativamente poderiam deixar de serem vistos como problemas – problemas rotineiros, na classificação de Polya – ou até mesmo, como exercícios, uma vez que os alunos já os resolviam valendo-se de recursos algébricos. Logo, um problema é muito diferente de um exercício. O exercício é uma atividade de adestramento no uso de alguma habilidade ou emprego de algum assunto já conhecido por quem o resolve, com a aplicação de algoritmos ou fórmulas conhecidas. O exercício envolve uma simples aplicação de conhecimentos.

Um problema, portanto, se diferencia de um exercício na medida em que, no exercício, dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam de forma imediata, à solução. Mas é possível que uma mesma situação represente um problema para uma pessoa, enquanto que para outra esse problema não existe, quer porque ela não se interesse pela situação, quer porque possua mecanismos para resolvê-la com um investimento mínimo de recursos cognitivos reduzindo-a num simples exercício. Segundo Pozo (1998, p.16),

> [...] uma situação somente pode ser concebida como um problema na medida em que exista um reconhecimento dela como tal, e na medida em que não disponhamos de procedimentos automáticos que nos permitam solucioná-la de forma mais ou menos imediata, sem exigir, de alguma forma, um processo de reflexão ou uma tomada de decisões sobre a seqüência de passos a serem seguidos.

Deste modo, um problema é diferente de um exercício, pois para resolver um exercício dispomos e utilizamos mecanismos - habilidades ou técnicas transformadas em rotinas automatizadas como conseqüência de uma prática contínua - que nos levam à solução, de modo imediato.

Assim sendo, uma mesma situação representa um problema para um aluno, enquanto que para outro esse problema pode ser reduzido a um simples exercício. Também uma mesma situação pode ser apresentada como problema ou como exercício. Por exemplo, se solicitarmos que se resolva uma equação do 2º. grau após a apresentação da fórmula resolutiva (com demonstração ou não), sugerimos que o aluno simplesmente “aplique a fórmula”. Logo, ele está diante de um exercício.

No entanto, se solicitarmos que o aluno exiba as raízes de uma equação polinomial do 2º grau, utilizando seus conhecimentos de fatoração e de resolução de equação polinomial do 1º grau, sem dúvida, nós o colocamos diante de um problema.

No ensino de matemática, de modo geral, predomina a utilização de exercícios. Se observarmos os livros didáticos de matemática da educação básica constatamos que isto ocorre. Se há “problemas”, eles estão propostos após o desenvolvimento de algum tópico e envolvem a aplicação de alguma fórmula já desenvolvida anteriormente. Então não são problemas de fato, são exercícios nos quais o aluno repete determinados procedimentos, ou seja, segue um modelo. Polya (1978) os denomina de problemas rotineiros.

Ao ocupar o tempo de aula somente com problemas rotineiros — que evidentemente também são necessários, sem contar que eles podem ter um grau crescente de dificuldade — o professor pode estar impedindo que o aluno exercite sua criatividade, sua capacidade de lidar com situações novas e, de certo modo, estar impedindo também o acesso do aluno ao conhecimento matemático no seu modo de ser inventado.

Ainda quanto ao problema rotineiro - que é necessário, mas não deve ser o único tipo de problema utilizado no ensino de matemática - o aluno não precisa, para resolvê-lo, de nada além de um pouco de paciência e cuidado ao seguir uma fórmula preestabelecida. Um problema deste tipo pode ser solucionado substituindo-se dados específicos num problema genérico resolvido anteriormente ou seguindo-se passo a passo, algum exemplo já dado. Polya (1978) classificou os problemas em três tipos: rotineiro, de determinação e de demonstração, sendo os dois últimos conhecidos como problema e teorema, respectivamente.

O objetivo do problema de determinação é encontrar um certo objeto, a incógnita, ou aquilo que se procura ou que se necessita. Tal problema pode ser: teórico ou prático, abstrato ou concreto, sério ou simples enigma. É predominante na matemática elementar e para resolvê-los é preciso conhecer as suas partes principais: a incógnita, os dados e a condicionante.

O problema de demonstração predomina na matemática superior e o objetivo deste é mostrar se certa afirmativa enunciada de forma clara é verdadeira ou não. Suas partes principais são a hipótese e a conclusão e para resolvê-lo é necessário conhecer tais partes com exatidão.

A classificação dos problemas dada por Polya (1978) se fundamenta nas idéias de Pappus – matemático grego (300 d.C.) - que escreveu no livro VII, das *Collectiones*, um ramo de estudo que ele denominou *Analyomenos*, que seria a arte de resolver problemas ou heurística. A heurística proposta por Pappus ensina os procedimentos de análise e síntese.[2]

Mas nas salas de aula o professor não está envolvido com matemáticos. Logo, ele precisa orientar o aluno na tarefa de resolver problemas. Assim, para facilitar a tarefa do aluno e também a do professor, G. Polya (1978) elaborou uma seqüência de passos para a resolução de problemas, a saber:

- compreensão do problema,
- estabelecimento de um plano,
- execução do plano e
- retrospecto.

[2] Ver Polya (1978, p. 104- 106).

Estes passos não necessariamente precisam seguir a ordem dada, no entanto, eles são adequados para o professor guiar o pensamento do aluno. A seguir mencionamos os passos propostos por G. Polya: (1978, p. xii-xiii)

Primeiro É preciso *compreender* o problema.	Compreensão do problema *Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?* É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou é redundante? Ou contraditória? Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separe as diversas partes da condicionante. Ë possível anotá-las?
Segundo Encontre a conexão entre os dados e a incógnita. É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata. É preciso chegar afinal a um *plano* para a resolução.	Estabelecimento de um plano Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? *Conhece um problema correlato?* Conhece um problema que lhe poderia ser útil? *Considere a incógnita!* E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante. *Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo?* É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização? É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições.
Terceiro *Execute* o seu plano.	Execução do plano Ao executar o seu plano de resolução, *verifique cada passo*. É possível verificar claramente que o passo está correto/ É possível demonstrar que ele está correto?
Quarto *Examine* a solução obtida.	Retrospecto É possível *verificar o resultado*? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

quadro 1

Como estes passos podem guiar o pensamento do aluno? Seguindo as idéias de Pappus, Polya observa que a análise é invenção e a síntese, execução; a análise consiste em conhecer um plano e a síntese, em executá-lo. Assim, a análise e a síntese estão presentes nos quatro passos. Para Polya, eles promovem a mobilização e a organização de conhecimentos, o que conduz o aluno à descoberta, a uma idéia nova, a invenção de uma estratégia.

Para se chegar à solução é necessário se lembrar de definições, de teoremas, de outros problemas já resolvidos. A mobilização seria o ato de tentar buscar na memória esses elementos relevantes. Mas esses elementos que são fatos isolados precisam se organizar. Segundo Polya (1978 , p. 130), para resolver um problema é necessário:

> [...] combinar esses fatos isolados e a sua combinação deve ficar bem adaptada ao problema em questão. Assim, ao resolvermos um problema matemático, precisamos preparar um argumento que relacione os materiais relembrados, num conjunto bem adaptado. Esta atividade de adaptar e combinar pode ser chamada de organização.

Após estes passos ou no decorrer deles pode ocorrer que a concepção que o aluno tinha do problema se enriqueça, se torne mais adequada, mais adaptada às circunstâncias do problema em questão, o que o conduz a encarar tal problema sob outros pontos de vista. Assim ocorre o que Polya (1978) denomina de variação do problema. Há, portanto, uma evolução da concepção do problema, o que possibilita ao aluno prever passos mais adequados, com maior clareza, para uma possível solução ou para reformular o problema e resolvê-lo. O que se espera é que uma idéia brilhante, uma idéia nova, uma súbita organização de todos os elementos presentes na mente possa emergir.

Assim, o propósito maior de se seguir os passos mencionadas é possibilitar, criar condições para que uma idéia nova possa emergir como nos mostra o esquema (figura 9).

mobilização → **organização** → **variação do problema**

↓

Uma idéia nova ← previsão do que deve ser feito...com maior clareza

figura 9 (POLYA, 1978, p. 131)

A criatividade que deve estar presente no movimento das idéias envolve o modo como as idéias se organizam e o novo emerge. Assim, o meio propício deve ser construído nos momentos da resolução do problema. O professor desempenha um papel importante no reavivar das idéias matemáticas e das experiências com outros problemas. A criatividade é despertada em meio a este amálgama de idéias matemáticas reavivadas na mente.

No ensino de técnicas e estratégias para a resolução de problemas é importante que o professor perceba que o que é um exercício para ele pode ser – para o aluno – um problema. Como o professor já automatizou os tipos de raciocínio envolvido nos passos, ele não os explicita detalhadamente e ainda não deixa claro para o aluno os conceitos, as definições ou os algoritmos utilizados na resolução. Isto pode dificultar a aprendizagem do aluno.

Mas resta-nos indagar sobre o alcance desta metodologia no sentido de estar possibilitando ao aluno o desenvolvimento de habilidades para resolver problemas de outros campos do conhecimento.

Seria interessante nos perguntarmos se o fato de um aluno aprender a resolver problemas matemáticos implicaria aprender a resolver problemas de ciências naturais ou do cotidiano, por exemplo?

Segundo Polya a utilização dos passos propostos: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto, em outras área do conhecimento e não só na matemática, facilitaria a generalização e conduziria o aluno a elaborar estratégias gerais, aplicáveis a qualquer dessas áreas. Mas o fato de se valer de estratégias gerais não implica, necessariamente, que o aluno possa se tornar hábil na resolução de problemas de outras áreas.

Isto pode ser comprovado se observarmos atentamente a segunda etapa – a do estabelecimento de um plano. Algumas questões sugeridas para se estabelecer o plano nos conduzem a inferir que é quase impossível concluir este passo sem conhecimentos específicos da área em questão. A elaboração do plano demanda um rol de habilidades que podem ser adquiridas devido ao envolvimento com outros problemas do mesmo campo de conhecimento como o fato de perguntar se o aluno conhece algum problema correlato, sugerir que ele pense num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante, sugerir que ele se questione quanto a possibilidade de introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização, solicitar que verifique se é possível reformular o problema, sugerir que ele volte para as definições etc.

No Capítulo 3, vamos explicitar os valores da matemática e depois avaliar o quanto esses valores podem ser tratados na disciplina escolar se aplicarmos as idéias de Polya sobre Resolução de Problemas. Para explicar os passos por ele propostos, apresentamos, em anexo, alguns problemas resolvidos.

CAPÍTULO 2

2.1 Resolução de Problemas: Habilidade geral ou processo específico?

Nas diversas etapas e áreas, especialmente na educação básica, destaca-se a necessidade de que os alunos adquiram habilidades e estratégias que lhes permitam aprender, por si mesmos, novos conhecimentos. Assim, segundo Pozo (1998, p. 9), vivemos momentos que exigem pessoas "capazes de enfrentar situações e contextos variáveis, que exijam deles a aprendizagem de novos conhecimentos e habilidades e um dos veículos mais acessíveis para levar os alunos a *aprender a aprender* é a solução de problemas".

De acordo com Pozo (1998), se considerarmos que o ensino, de modo geral, se baseia na transmissão de conhecimentos, então, a solução de problemas pode constituir não somente um conteúdo educacional, mas também, e principalmente, um enfoque ou uma forma de conceber as atividades educacionais. A solução de problemas baseia-se na apresentação de situações abertas e sugestivas que exijam do aluno uma atitude ativa e um esforço para buscar suas próprias respostas, seu próprio conhecimento. Argumenta ainda que o ensino, via resolução de problemas, pressupõe promover nos alunos o domínio de procedimentos, assim como a utilização dos conhecimentos disponíveis, para dar resposta a situações variáveis e diferentes, habituando-os a encontrar por si mesmos, respostas às perguntas que os inquietam, ao invés de esperar uma resposta já elaborada por outros e transmitida pelo livro texto ou pelo professor.

Quando cursei o primário era comum que diante do problema: "Maria recebeu 20 balas, depois ganhou mais 12 balas. Em seguida deu 16 balas para sua irmã e o restante repartiu para 4 alunos. Quantas balas cada um recebeu?, O(A) professor(a) preocupado(a) com o fato de que alguns alunos não entendiam o problema - com dificuldades para efetuar as operações e elaborar sua solução –, às vezes inseguro quanto à eficiência de sua metodologia no ensino de aritmética e na ansiedade de fazê-los chegar na resposta correta, sugeria: -"Façam uma conta de mais, uma de menos e outra de dividir". Tal direcionamento poderia ser prejudicial, pois o aluno(a) não adquiria o hábito de procurar por si, ou mesmo com a orientação do(a) professor(a) a resposta do problema e, provavelmente, jamais conseguiria fazer um retrospecto para testar a resposta e verificar se ela estava correta.

Concordamos com Pozo (1998, p.14) que ensinar a resolver problemas

> [...] não consiste somente em dotar os(as) alunos(as) de habilidades e estratégias eficazes, mas também de criar neles o hábito e a atitude de enfrentar a aprendizagem como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta. Não é uma questão de somente ensinar a resolver problemas, mas também de ensinar a propor problemas para si mesmo, a transformar a realidade em um problema que mereça ser questionado e estudado.

Mas como podemos afirmar que aprender a resolver problemas matemáticos, por exemplo, conduz os alunos a resolver problemas cotidianos ou problemas de outras áreas do conhecimento?

> Os estudos realizados nas últimas décadas pela psicologia cognitiva e educacional, nas suas experiências orientadas para ensinar os alunos(as) a pensar ou a resolver problemas podem ajudar-nos a compreender melhor os processos envolvidos nas suas soluções, bem como esses processos podem ser aprimorados através do ensino. Nestes estudos podemos identificar duas tendências na abordagem da solução de problemas e do seu ensino: a solução de problemas como uma habilidade geral ou a solução de problemas como um processo específico. (POZO, 1998, p.18)

Na primeira tendência, a solução de problemas se baseia num processo relativamente geral e independente do conteúdo, que pode ser ensinada de maneira mais ou menos formal e transferida a diversas áreas do conhecimento e na outra, há uma ênfase na dependência do conteúdo.

De acordo com Pozo (1998), durante muito tempo, os estudos da psicologia educacional aplicada pareciam concordar com a idéia de que a solução de problemas se fundamenta na aquisição de estratégias gerais, de forma que uma vez adquiridas possam ser aplicadas a qualquer tipo de problema. Essas estratégias gerais foram bem elaboradas por Polya, para o qual ensinar a resolver problemas é proporcionar aos alunos essas estratégias gerais para que sejam aplicadas numa nova situação problemática. A solução de problemas seria, assim, um conteúdo generalizável, independentemente das áreas especificas do currículo.

Para Polya o conteúdo não seria generalizável para qualquer área específica. Vejamos qual seria o entendimento dele. Segundo Polya a utilização dos passos propostos: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto em outros campos do conhecimento e não só na matemática, facilitaria a generalização e conduziria o aluno a elaborar estratégias gerais, aplicáveis a qualquer desses campos. No entanto, se observamos atentamente a segunda etapa - a do estabelecimento de um plano - veremos que algumas questões sugeridas para se estabelecer tal plano nos conduzem a inferir que é quase impossível estabelecê-lo sem conhecimentos específicos da área em questão e a elaboração do plano demanda um rol de habilidades que podem ser adquiridas devido ao envolvimento com outros problemas do mesmo campo de conhecimento...como o fato de perguntar se o aluno conhece algum problema correlato, sugerir que o aluno pense num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante, sugerir que o aluno se questione quanto a possibilidade de introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização, solicitar que o aluno verifique se é possível reformular o problema, sugerir que o aluno volte para as definições etc.

Ainda, de acordo com Pozo (1998, p. 29), parece difícil, tanto por razões psicológicas como didáticas, treinar os alunos na solução de problemas de uma maneira geral, ou seja, independente dos conteúdos concretos aos quais se aplicam.

Mas há de se notar que o esquema explicitado no primeiro capítulo (figura 2) nos mostra a seqüência: mobilização, organização, uma possível variação do problema decorrente de um aprofundamento no entendimento deste e o possível emergir de uma idéia nova. A mobilização envolve o remexer, o reviver de definições, de conceitos, de algoritmos, de problemas similares e de maneiras de resolver já praticadas. Há, portanto, todo um repertório necessário para se chegar a uma idéia nova... ou à solução do problema. O propósito é propiciar a descoberta, a criação de algo novo, o desenvolvimento da criatividade do aluno...em matemática...ou num outro campo do conhecimento se estas etapas forem seguidas na resolução de problemas desse campo.

Deste modo, concluímos que Polya alerta para a construção de procedimentos gerais para a resolução de problemas em qualquer área de conhecimento. No entanto, por serem gerais, ao adentrar uma área de conhecimento, demandam conhecimentos específicos desta área para que se tornem efetivos.

Assim, o mesmo é válido para a resolução de problemas do cotidiano. Segundo Pozo (1998, p. 41-42), o principal motivo da dificuldade de transferência de uma habilidade ou de um conhecimento adquirido em aula para um contexto mais cotidiano, mais informal:

> [...] é a diferença existente entre os contextos nos quais o aluno aprende, inicialmente, a resolver um problema e os novos contextos para os quais deve fazer a transferência. Parece estar provado que quanto maior for a semelhança entre o contexto de aprendizagem e o contexto de recuperação mais fácil será a transferência. Entretanto, os contextos escolares costumam ser muito diferentes, quase opostos em muitos aspectos aos contextos sociais nos quais se pretende que, mais tarde, os alunos apliquem os conhecimentos aprendidos [...] (POZO, 1998, p. 41-42).

Os problemas devem abranger contextos diferenciados que, eventualmente, contemplem o cotidiano do aluno, aplicações em outras áreas do conhecimento ou se reportar às origens de um conceito que pode envolver questões empíricas. Segundo Pozo (1998, p. 139), Resolução de Problemas está deixando

> [...] o enfoque "generalista" – baseado na idéia de que os alunos podiam aprender modelos gerais ou "ideais" úteis para resolver qualquer problema – em favor de uma abordagem mais específica, ligada aos conteúdos conceituais e aos domínios do conhecimento aos quais pertencem os problemas. Os alunos não podem ser "ensinados a pensar" ou a "resolver problemas" em geral à margem dos conteúdos específicos de cada área […].

Os que defendem essa posição costumam realizar estudos comparando a solução de problemas por especialistas numa determinada área, mostrando que a experiência prévia e o conhecimento dificilmente seriam transferidos ou generalizados para problemas de outras áreas.

O rendimento do trabalho, em cada área especifica seria o modelo para a solução eficiente de um problema. Os físicos resolvem problemas de Física, de maneira mais eficaz que o resto das pessoas, porque dispõem de conhecimentos tanto dos conceitos como dos procedimentos específicos.

O primeiro e mais fundamental pressuposto dos estudos sobre a solução de problemas por especialistas e principiantes é que:

> [...] as habilidades e estratégias de solução de problemas são específicas a um determinado domínio e, por isso, dificilmente transferíveis de um área a outra. A maior eficiência na solução de problemas pelos especialistas não seria devido a uma maior capacidade cognitiva geral e sim aos seus conhecimentos específicos. Assim, por exemplo, foi comprovado que os jogadores de xadrez não são diferentes das demais pessoas, na sua inteligência geral e na sua capacidade global de memória. Porém sabe-se que os jogadores de xadrez lembram melhor das posições de xadrez, sempre que estas correspondam às suas experiências cotidianas, jogando xadrez. (POZO, 1998 , p.30).

Por outro lado, considera-se que as habilidades de resolução de problemas e, em geral, a perícia, são efeitos da prática, assim os alunos precisam adquirir uma perícia suficiente, que somente poderá ser obtida através de resolver muitos exercícios e problemas correlatos em determinada área.

Poderíamos dizer que a solução especializada de problemas baseia-se, em grande parte, na aplicação de procedimentos técnicos mais do que no uso deliberado e intencional de estratégias. No entanto, esta automatização de técnicas, produto da prática, permite liberar recursos cognitivos que fazem com que a conduta especializada seja também mais eficiente quando enfrenta verdadeiros problemas, ou seja, situações que não podem ser facilmente reduzidas às categorias já conhecidas. Nesse caso, comprovou-se que os especialistas também recorrem a uma estratégia “para trás”, procurando, através de uma seqüência de meios e fins, aproximar os dados iniciais à solução que procuravam. A vantagem dos especialistas nesse processo estratégico, não automatizado, parece residir no maior controle que exercem sobre seus processos de solução, devido, em grande parte, ao seu conhecimento explícito dos princípios conceituais que regem o problema.

2.2 A especificidade das áreas de conhecimento

Pozo (1998) diferencia a solução de problemas nas diferentes áreas do currículo, enfatizando três áreas, nas quais, pelos seus conteúdos e tradição educacional sejam mais relevantes: a área da Matemática, das Ciências da Natureza e dos Estudos Sociais.

A Matemática constitui o âmbito mais tradicional do estudo da solução de problemas. Vejamos os exemplos: 1. "Qual é a metade de 2, mais 2 ?"
2. "Construir uma régua numérica, com escala para medir a quantidade de óleo diesel contido num vagão cilíndrico, de comprimento e raio da base conhecido." O primeiro para as séries iniciais do ensino fundamental e o segundo, para nível superior.

Uma prova dessa identificação existente entre "problema" e "matemática" , segundo Pozo, nos é dada pelo fato de que a Matemática tem sido uma das áreas na qual se realiza o maior número de pesquisas e trabalhos sob o rótulo de "solução de problemas". Esta posição privilegiada foi determinada, fundamentalmente, por se constituir uma disciplina formal ou abstrata, na qual a influência do conteúdo temático se vê minimizada, o que permite propor problemas muito bem definidos.

Em um sentido mais geral, esses desenvolvimentos recentes no campo da resolução de problemas matemáticos, estão mostrando como, do ponto de vista cognitivo, a Matemática não pode funcionar como uma linguagem sem conteúdo, como um conjunto de regras sintáticas, no qual o conteúdo semântico seria secundário ou irrelevante. De fato, a natureza algébrica e quantitativa não é própria somente dos problemas matemáticos, mas também das Ciências Naturais, particularmente da Física e da Química. O problema do cálculo da altura do poço, em função do tempo que a pedra leva para chegar ao seu fundo, representa para os(as) alunos(as) mais um problema matemático, do que um problema físico ou conceitual, pois basta substituir, o valor da aceleração da gravidade e o valor do tempo para se chegar a altura do poço: $h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$.

Em outras palavras, ao reduzir os problemas científicos a tarefas matemáticas, o aluno(a) estará resolvendo tarefas, sem a devida compreensão do problema, pois os conceitos físicos da queda de um corpo são mais complexos. Partindo desse enfoque, os alunos(as) deveriam modificar as suas crenças, a partir da sua experiência cotidiana, numa física pré-newtoniana, ou seja, o aluno(a) deveria compreender e explicar situações científicas e cotidianas a partir dos conceitos da ciência, o que exige uma maior dedicação à solução de problemas conceituais ou qualitativos. Esses problemas conceituais requerem para sua solução, o uso de estratégias claramente diferentes das empregadas nos problemas matemáticos.

Ao invés de tomar como ponto de partida um teorema ou axioma e aplicar uma série de regras “sobreaprendidas”, isto é, automatizadas por repetição, o aluno(a) deve recorrer a um raciocínio hipotético-dedutivo que lhe permita formular e comprovar hipóteses explicativas sobre a natureza do problema científico. Pesquisas tanto didáticas como psicológicas, relacionadas com o pensamento hipotético-dedutivo pelos alunos têm proporcionado muita informação sobre as dificuldades apresentadas pelo uso do “método científico” na resolução de problemas, alguns com habilidades e estratégias das Ciências Naturais e outras comuns a outras áreas. (POZO, 1998, p. 37)

Concluindo, essas habilidades deveriam ser treinadas pelos alunos como parte dos procedimentos necessários para “fazer ciência” e resolver problemas científicos. O domínio desses procedimentos está, no entanto, fortemente condicionado pelo conteúdo conceitual das tarefas às quais se aplicam, onde “saber dizer” e “saber fazer” costumam diferir muito mais.

Ainda segundo o mesmo autor, com mais motivos deve ser reivindicada a especificidade das estratégias adotadas na solução de problemas sociais. Como a OMC deve agir, junto a OPEP, para que o preço do barril de petróleo não suba? – um exemplo de problema social.

No contexto da solução de problemas, costuma-se atribuir aos problemas sociais, as seguintes características:

- são mal definidos ou pouco estruturados;
- não estabelecem as condições iniciais;
- podem apresentar inúmeras soluções.

Os passos propostos por Polya (1978) podem ser aplicados na solução deste problema, no entanto, sem conhecimentos de ciências econômicas e ciências políticas, por exemplo, seria impossível entender até mesmo o contexto do problema. Por exemplo, o primeiro passo, compreensão do problema envolve o entendimento do contexto – as situações econômicas, sociais e políticas atuais.

Assim, a incógnita poderia ser: qual é o preço máximo sustentável para todos os países que dependem do petróleo fornecido pelos países filiados a OPEP? A resposta a esta questão daria um intervalo de valores que permitiria aos envolvidos fazer as negociações. As figuras são as inúmeras formadas pelos dados estatísticos que os solucionadores devem ter em mãos. As ações políticas já adotadas em situações semelhantes também já deveriam ser de conhecimento dos envolvidos na solução do problema. É claro que o grau de controle na execução do plano é diferente do que se faz num problema matemático – neste problema há negociações e maiores possibilidades de mudanças nos planos estabelecidos. Na matemática se opta por uma solução econômica e elegante. Assim, há passos correlatos para os outros.

Desta forma, concordando com a proposta de Polya (1978), ou nosso entendimento dela, apresentaremos, no Capítulo 4, reflexões – no que entendemos ser nossa maior contribuição neste trabalho – sobre os valores da matemática que permeiam o seu ensino, via resolução de problemas.

2.3 Resolução de Problemas e Modelagem Matemática

Com o propósito principal de comparar as novas tendências de resolução de problemas, que apresentaremos no Capítulo 5, mencionamos algumas idéias sobre Resolução de Problemas e Modelagem Matemática. Ao empreender a comparação, certamente, vislumbraremos os valores da matemática que permeiam estas novas tendências, com maior clareza, uma vez que as idéias não se constroem sem vínculos umas com as outras.

Há também a questão entre matemática pura e matemática aplicada que vem à tona quando se discute a modelagem matemática.

> A Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. (BASSANEZI, 2002, p. 24)

Tal método trata, portanto, de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, via técnicas matemáticas, interpretando as suas soluções na linguagem não matemática e possível de ser compreendida por não matemáticos ou não cientistas, de modo geral.

O problema real é uma parte da realidade e aplicar a modelagem matemática é refletir sobre esta parte da realidade.

> Quando se procura refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender, ou de agir sobre ela – o processo usual é selecionar, no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essências e formalizá-los através de um sistema artificial: o modelo. (BASSANEZI, 2002, p. 24)

Bassanezzi (2002, p. 19-20) destaca dois tipos de modelos: o modelo objeto e o modelo teórico. O modelo objeto representa um objeto ou um fato concreto e suas características principais são: a estabilidade e a homogeneidade de variáveis. Pode ser pictórico, conceitual ou simbólico. Um paralelepípedo reto retângulo pode representar um cômodo de uma casa, uma função linear, do tipo C(x) = 2x, pode representar o custo de x litros de gasolina e $\int f(x)dx$ representa a família de todas as primitivas da função representada por y = f(x). São, respectivamente, modelos pictórico, conceitual e simbólico. Quanto ao modelo teórico, ele está vinculado a uma teoria geral e será obtido por meio de um modelo objeto com um código de interpretação. Para estar muito próximo do real – o que seria o ideal – ele deve abranger todas as variáveis envolvidas no fenômeno em estudo, bem como as relações que se obtêm entre elas, por meio de hipóteses e dados reais.

O modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de algum modo e em certa medida o objeto estudado, segundo Bassanezi (2002, p. 20). No esquema (figura 11) podemos observar as etapas do processo de construção de modelos matemáticos. Para Bassanezi (2002, p. 33-35), a modelagem matemática é o método científico usado nas ciências factuais. Suas áreas de pesquisa abrangem a Física Teórica, a Química Teórica, a Biomatemática, bem como aplicações em problemas industriais e de engenharia. A Ciência da Computação inclui muitas aplicações da lógica matemática (teoria das Máquinas de Turing), lógica fuzzy, as funções recursivas e, de modo geral, a computabilidade. Também as várias Ciências Sociais estão se valendo da matemática para a organização dos seus dados e para testar a objetividade de suas descobertas, passando por outras áreas e chegando às técnicas de computação gráfica que têm sido utilizadas nas artes.

A Matemática Aplicada pode ser considerada como a arte de aplicar matemática a situações problemáticas, por meio da modelagem matemática. Na relação da matemática com a realidade é que surgem as controvérsias sobre a existência da Matemática Pura e da Matemática Aplicada. A diferença entre elas está nos modos de fazer e de se pensar matemática. Para Machado (2001, p. 92), "[…] a pretensa objetividade, neutralidade, universalidade, refere-se à Matemática Pura, reconhecendo-se para a Matemática Aplicada uma necessidade de adaptação à realidade sócio-econômica de cada país".

A modelagem matemática, então, quando transposta para o ensino de matemática, poderia pôr em evidência os vínculos dos progressos da matemática com as necessidades de outras ciências, com as solicitações da sociedade onde ela é construída, no entanto, sem reduzi-la a fins utilitários imediatistas?

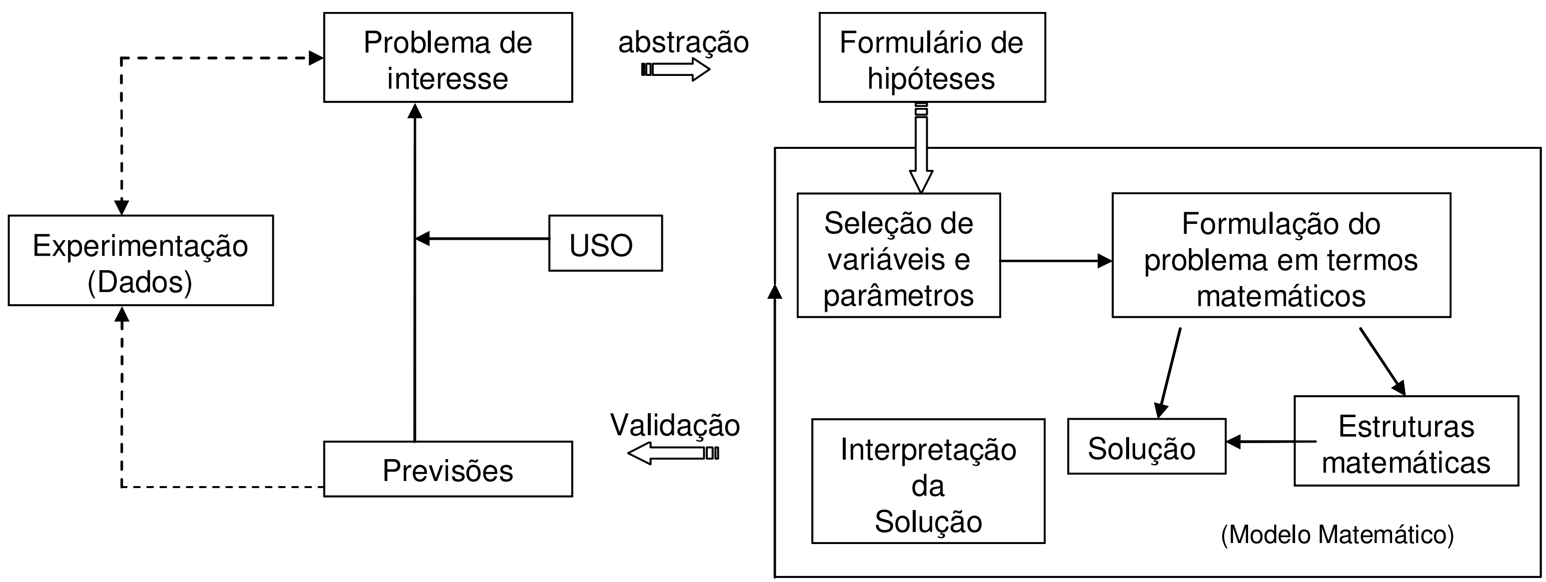

figura 10 (BASSANEZI, Rodney C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**- **uma nova estratégia**, São Paulo, Editora Contexto, 2002., p.202)

Mas como elaborar modelos matemáticos envolvendo os assuntos do ensino básico. Para alunos de uma 6ª série, as atividades diárias de uma dona de casa, - as compras realizadas na quitanda ou na feira livre -, poderiam ser interpretadas via modelo matemático. Vamos a um exemplo (sugestão de atividade envolvendo expressões algébricas), que para melhor entendimento, dividimos em várias partes.

Parte 1

O professor fornecerá uma lista com produtos de feira livre contendo os itens para que os alunos verifiquem quais os produtos consumidos e a quantidade consumida em suas casas.

Na sala de aula, esses alunos serão divididos em grupos, onde cada um fará a média de cada item da lista, apresentando o resultado na lousa, sendo que o professor, juntamente com os alunos, fará a média geral de consumo para cada item. A partir disso, será feita uma lista de compras definitiva com a quantidade estabelecida pela média. Nessa primeira parte, teremos uma tabela assim:

Batata	1,5 Kg
Tomate	3 Kg
Cenoura	2 Kg
Cebola	3 Kg
Laranja	3,5 dz
Maçã	1 Kg
Banana	2,5 dz
Pêra	1,5 Kg

Parte 2

Com a lista em mãos, os grupos buscaram os preços em diferentes feiras-livres.

Novamente em sala de aula com os dados obtidos, cada grupo montará uma tabela de preços. Num segundo momento o professor induzirá os alunos a estabelecer uma relação entre a quantidade de mercadoria e o preço, formando assim uma nova tabela. Essa relação, por enquanto para o aluno está entre a quantidade pré-estabelecida e o preço que ele encontrou sem perceber que o preço poderá variar. Cada grupo passará sua tabela de preços na lousa e os demais anotarão os dados.

Nessa segunda parte o aluno terá que elaborar duas tabelas: A primeira é a relação por ele estabelecida entre o preço e a quantidade:

Itens	**Preço R$ GRUPO 1**	**Relação**
Batata	0,80	1,5 X 0,80
Tomate	0,70	3 X 0,70
Cenoura	0,50	2 X 0,50
Cebola	0,40	3 X 0,40
Laranja	0,50	3,5 X 0,50
Maçã	1,50	1 X 1,50
Banana	1,00	2,5 X 1,00
Pêra	1,50	1,5 X 1,50

- A segunda tabela será formada pelas pesquisas desses oito grupos:

Itens	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8
Batata	0,80	0,80	0,90	0,70	0,60	0,65	0,70	0,75
Tomate	0,70	0,75	0,60	0,50	0,80	0,50	0,65	0,70
Cenoura	0,50	0,70	0,80	0,60	0,70	0,60	0,75	0,80
Cebola	0,40	0,50	0,60	0,60	0,70	0,70	0,65	0,70
Laranja	0,50	0,80	0,90	0,60	0,70	0,60	0,80	0,75
Maçã	1,50	1,80	1,80	2,00	1,50	1,60	1,40	1,50
Banana	1,00	1,00	0,90	0,80	1,10	0,90	0,95	1,00
Pêra	1,50	1,80	1,70	1,60	1,70	1,50	1,60	1,40

Parte 3

Cada grupo trabalhará apenas um item (ex.: grupo da batata, da cenoura, etc.), mas com todos os preços conseguidos. A partir daí o professor fará uma bateria de perguntas, do tipo: -Qual seria a média do preço do produto?, o que levará os alunos(as) a perceber as variações que podem ocorrer. A última pergunta será: -Você seria capaz de montar uma lei de formação que esclareça essa variação de preço? O que o professor deseja com essa pergunta é levar os alunos a construírem uma expressão algébrica que esclareça a relação de dependência entre o custo total da feira e o preço dos produtos, considerando que a quantidade de produtos é praticamente a mesma de uma semana para outra.

Nessa terceira parte também teremos a seguinte tabela:

Batata	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8
Preço R$	0,80	0,80	0,90	0,70	0,60	0,65	0,70	0,75

Parte 4

Com todas as expressões algébricas prontas, o professor juntamente com os alunos construirão uma tabela, contendo a expressão para cada item, onde as variáveis serão letras diferentes.

A partir daí o professor estabelecerá valor para as variáveis, onde o aluno achará os valores numéricos diferentes para cada expressão, isto tudo como forma de exercício. Ainda na forma de exercício o professor pedirá para os grupos montarem uma expressão para calcular o valor total que eles gastariam em sua compra. Depois disso, comparariam todos os totais para verificar qual feira tem o maior e o menor preço, aproveitando essa oportunidade para trabalhar com o cálculo de porcentagem.

Nessa quarta parte teríamos a última tabela do nosso trabalho, que é a tabela de funções, ou para os alunos as expressões algébricas:

Itens	**Expressão Algébrica**
1,5 Kg Batata	P(a)= 1,5 . a
3 Kg Tomate	P(b)= 3 . b
2 Kg Cenoura	P(c)= 2 . c
3 Kg Cebola	P(d)= 3 . d
3,5 dz Laranja	P(e)= 3,5 . e
1 Kg Maçã	P(f)= 1 . f
2,5 dz Banana	P(g)= 2,5 . g
1,5 Kg Pêra	P(h)= 1,5 . h

O preço total da compra realizada na feira livre pode ser dado pela expressão: P (a,b,c,d,e,f,g,h) = 1,5 a +3b + 2c + 3d + 3,5e + f + 2,5g + 1,5h. Outras atividades (exercícios) poderão ser propostos utilizando a expressão obtida, para que o aluno adquira habilidade de operar com elas, notadamente, substituindo as variáveis por valores possíveis, como os que ele encontrou, por exemplo. Esta parte é importante para que o aluno perceba o alcance da fórmula obtida (o modelo). Nada impede que atividades como esta sejam realizadas com o uso do computador. No excel, inúmeras compras com seus respectivos custos podem ser simulados rapidamente.

Parte 5

Para verificar a aprendizagem dos alunos (instrumento de avaliação), o professor poderá solicitar um trabalho individual, semelhante ao realizado, mas só que agora com os itens de uma cesta básica utilizada em sua casa ou que alguém da casa recebe no trabalho ou mesmo deixar que os alunos escolham o assunto.

Vamos relatar, agora, como a modelagem matemática caminha para as salas de aula. Como ela se transforma em um método de ensino/aprendizagem de matemática?

Segundo Fiorentini (1994, p.242-250), a Modelagem Matemática (abreviadamente MM), surgiu no Brasil, como método de ensino/aprendizagem de matemática, no início dos anos oitenta e por iniciativa de um grupo de professores do IMECC- UNICAMP – liderado por Rodney Bassanezi -, como tentativa de sanar as dificuldades de professores em Cálculo Diferencial e Integral, nos cursos de aperfeiçoamento. Mas, a emergência deste método pode ser atribuída, em parte, a um grupo de professores que fundaram uma área de pesquisa denominada Biomatemática, a partir dos anos 70. O método de investigação em Biomatemática é basicamente a modelagem matemática que toma como ponto de partida problemas reais e vinculados ao meio ambiente e à saúde. A obtenção dos modelos para interpretar a realidade possibilitou, além da compreensão do problema, matematicamente, a interferência no meio no sentido de superar o problema, modificando o meio. Em 1976, foi criada a disciplina denominada "Matemática e Sociedade", ministrada até os anos 80, por Ubiratan D' Ambrosio. Com esta disciplina, ao tratar de situações-problema da comunidade, o método da modelagem matemática passa a ter uma conotação especial no Brasil. O termo modelagem, portanto, surge vinculado a um tipo particular de resolução de problemas e, para D'Ambrosio (1986, p.11), a modelagem "[...] é um processo muito rico de encarar situações reais, e culmina com a solução efetiva do problema real e não com a simples resolução formal de um problema artificial".

O autor conclui explicitando que a idéia de MM assumida pelo grupo tem em comum as seguintes características:

– partir de uma situação real – visualizada a partir de dados coletados – fontes bibliográficas, entrevistas ou resultados de experimentos;
– formular um problema observando-se os dados;
– construir um modelo matemático para interpretar a situação real;
– testar o modelo;
– ação na realidade concreta, para verificar se o modelo é adequado ou não; caso o modelo não seja adequado deve-se buscar um outro modelo.

Ao concluir o estudo das dissertações e teses sobre MM, o autor faz uma avaliação final, destacando que a maioria delas denuncia a prática escolar como a que privilegia a dimensão internalista da matemática ou indica que o fracasso do ensino da matemática se deve, principalmente, à predominância de um ensino não significativo para o aluno que não considera suas necessidades e expectativas ou seus conhecimentos prévios. A modelagem matemática, em contrapartida, traria para as aulas uma matemática viva, presente em todos os setores da vida humana, ou reforçaria o caráter criativo e dinâmico do "fazer matemático", bem como exibiria seus vínculos com a realidade e outras ciências. Fiorentini (1994, p. 272) alerta que:

> Para que essa linha de pesquisa se consolide no Brasil é preciso que ela ultrapasse a fase dos ensaios e relatos de experiências e passe a uma fase de investigação mais sistemática. É preciso também que o pesquisador deixe de lado a atitude apologética em relação à MM e passe a adotar uma postura mais crítica, inquiridora e investigativa. Se isso não ocorrer, essa linha corre o risco de esgotar-se e esvaziar-se.

Mas, se aplicarmos tal método de ensino, que matemática estará presente nas nossas aulas? Que valores da matemática contemplaremos? Responderemos a esta pergunta no Capítulo 4.

CAPÍTULO 3

3.1 Por que ensinar matemática nas escolas?

Segundo D'Ambrósio (1993, p. 13-14), a matemática é uma ciência dotada de uma beleza intrínseca pela sua construção lógica, formal; é universal – qualquer cultura tem uma linguagem para medir, calcular, ordenar, inferir etc.; ajuda a pensar com clareza e a raciocinar melhor; também faz parte de nossas raízes culturais e nos é útil.

A matemática está presente nas atividades mais rotineiras de nossa vida, logo, deveríamos tê-la como algo acessível. Ela nos auxilia na resolução de problemas simples do nosso cotidiano – contas no supermercado, cálculos com juros, cálculos de áreas de regiões etc. – como também nos auxilia a generalizar conceitos, assimilando-os de um modo teórico.

Mas por que não damos conta – nós professores(as) – nem mesmo de levar nossos alunos das escolas reais a aprender a utilizar a matemática, do modo mais trivial? Isto é o que constatamos nos resultados do Saeb, por exemplo.

O Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb) apresenta resultados, divulgados pelo Ministério da Educação, pouco animadores, conforme revela o secretário da Educação Básica, Francisco das Chagas Fernandes: "Se há problemas de interpretação de texto, há também dificuldade em matemática. Além disso, ainda temos muitos professores(as) na educação básica com formação insuficiente" (FERNANDES, 2004, p. C3).

O Saeb é realizado a cada dois anos para alunos de 4ª. a 8ª. séries do ensino fundamental e da 3ª. série do ensino médio. Em 2003, participaram cerca de 300 mil alunos de 6.270 escolas públicas e particulares, de todos os estados. Os resultados dessa avaliação demonstram que o aprendizado de matemática segue **crítico**[3], uma das classificações utilizadas nas avaliações. A seguir as classificações:

- **Muito crítico:** alunos não são bons leitores e não desenvolveram habilidades mínimas para a série em que estão matriculados; não identificam operações básicas para a série que estão cursando. Ex.: Alunos(as) da 4ª. série não sabem somar ou subtrair, quando essas operações são inerentes à compreensão de um problema, para se chegar à sua solução.
- **Crítico:** ainda não são leitores competentes porque não compreendem textos simples; desenvolvem algumas habilidades elementares de interpretação de problemas, mas não conseguem transpor o que está solicitado no enunciado.
- **Intermediário:** estão começando a desenvolver as habilidades de leitura, mais próximos do nível exigido na série que estão cursando. Já conseguem compreender melhor os textos; desenvolvem habilidades mais próximas das exigidas nas séries, mas ainda não tem suficiência para resolver problemas.
- **Adequado:** são leitores com nível de compreensão dentro dos exigidos na série. Compreendem textos narrativos e informativos; interpretam e sabem resolver os problemas de forma competente.

A maior parte dos alunos do ensino fundamental e médio não sabe resolver questões de matemática, compatíveis com a série que cursam – que até a 5ª série, pelo menos – trata da matemática útil para o nosso dia-a-dia. A situação é ainda pior no 3º. ano do ensino médio: 68,8% deles tiveram nível de conhecimento classificado entre **crítico** e **muito crítico** em 2003, o quer dizer que esses alunos não conseguem interpretar o enunciado de uma questão para se chegar ao resultado matemático.

---

[3] Grifo nosso

Segundo Davis (1995, p. 87), é útil aquilo que satisfaz uma necessidade humana e a partir disto ele explica como cada pessoa, em sua ocupação diária, pode justificar a utilidade da matemática. Para um pedagogo, a matemática é útil porque ensina a pensar e raciocinar com rigor; para um arquiteto, por permitir a percepção e a criação da beleza visual; para um filósofo ela é útil na medida que permite escapar à realidade da vida cotidiana; já para um professor, porque fornece o sustento; para um editor, por possibilitar vender muitos livros didáticos; segundo um astrônomo ou um físico, por ser a linguagem da ciência, enquanto que para um engenheiro civil a matemática é indispensável para construir uma ponte, por exemplo. Ainda, para um matemático, ela é útil dentro da própria matemática, pois um corpo matemático é útil quando aplicável a um outro corpo matemático.

Assim, o fato de a matemática ser útil envolve vários tipos de justificativas, como elementos estéticos, filosóficos, históricos, psicológicos, pedagógicos, comerciais, científicos, tecnológicos e matemáticos.

Qual a utilidade da matemática no dia-a-dia? Segundo Davis (1995, p. 89), há toda uma problemática em torno desta questão, com conseqüências para os ambientes escolares. Para o autor, a resposta desta questão está envolta em mito, ignorância, desinformação e confusão. Alguns exemplos de utilidade comum são claros, no entanto, quando ascendemos a matemática mais elevada, torna-se mais difícil observar e verificar essas aplicações. Seria interessante que algum investigador enérgico e instruído dedicasse alguns anos a essa tarefa, visitando algumas empresas, laboratórios, fábricas, etc., a fim de documentar onde realmente isso acontece.

Assim, se enfatizarmos que o ensino da matemática deve estar voltado para as aplicações no nosso cotidiano poderemos nos limitar a ensinar as operações fundamentais, noções de geometria plana e, no máximo, números inteiros relativos. Quanto às outras aplicações, por outro lado, corre-se o risco de ensinarmos a utilização de algoritmos. Afinal, nos ambientes escolares devemos priorizar o ensino de matemática aplicada?

Será que não estamos dando conta, ao ensinar matemática, de trabalhar todas as suas especificidades? Seria este o motivo dos resultados tão desanimadores, como os que apresentamos? As pesquisas realizadas sobre o ensino de Matemática indicam que:

> […] predomina um ensino em que o professor expõe o conteúdo, mostra como resolver alguns exemplos e pede que os alunos resolvam inúmeros problemas semelhantes. Nessa visão de ensino o aluno recebe passivamente e imita os passos do professor na resolução de problemas ligeiramente diferentes dos exemplos. Predomina o sucesso por memória e repetição. Raramente esses alunos geram problemas, resolvem aqueles que exijam criatividade ou que não sejam simplesmente a aplicação de passos predeterminados. (D'AMBROSIO,1993, p. 38).

No ensino tradicional – no qual predominam os procedimentos mencionados acima - deu-se muita ênfase ao utilitarismo, com problemas apresentados como modelos, já codificados. O aluno não tinha acesso à construção de um conceito matemático, por exemplo, ele se limitava a aplicar algoritmos. O conteúdo menosprezava o valor cultural e formativo da matemática.

Para Santaló (1994, p. 38-39), a matemática tem se constituído sempre como parte importante de todo sistema educativo. Menciona que nas civilizações egípcias e mesopotâmicas se ensinavam os cálculos necessários para repartir as colheitas, dividir terrenos, pagar e cobrar impostos e entender o movimento dos astros para construir o calendário. Deste modo, tratava-se de um ensino utilitário, onde um número reduzido de pessoas (escribas) aprendia a matemática como uma das técnicas manuais, como um artesão e, portanto, o raciocínio não era o fim primeiro.

Enfatiza ainda que na Grécia a matemática se desenvolveu com seus aspectos bem definidos: 1º como técnica - ferramenta útil para a vida – , 2º como necessária para a formação intelectual destinada a ordenar o conhecimento, desenvolver a inteligência e chegar ao conhecimento da verdade. Ele resgata nos diálogos de Platão – que constam na “República”-, as origens desses dois olhares para a matemática. Explica que Platão, em seu livro VII da República, em forma de diálogo entre Sócrates e Glaucón, busca a melhor maneira de formar aqueles que concretizariam a república ideal e, o ensino da matemática, desempenha um papel importante nesta tarefa. A seguir trechos da República.

> *Para elevar a alma ao conhecimento do bem há de se recorrer a um ensino que por sua vez recorrem todas as artes, todas as formas de raciocínio, todas as ciências e que é imprescindível aprender entre as primeiras; a que ensina o que é um, o dois e o três. Refiro-me, em suma, a ciência dos números e ao cálculo. Ou não é verdade, por acaso, que nenhuma arte e nenhum conhecimento pode prescindir dela?(VII,522). Logo será conveniente, Glaucón, prescrever como lei esse ensino e ao mesmo tempo convencer aqueles que vão desempenhar as funções mais importantes da Cidade a empreenderem o estudo do cálculo e que se dediquem a ele, não de uma maneira superficial, e sim até elevar-se pela inteligência pura a contemplação da natureza dos números, e que cultivem esta ciência, não como os comerciantes ou os navegantes, visando as compras e as vendas, senão para aplicá-la na guerra, mas para propiciar à alma os meios de elevar-se desde a esfera de sua geração até à verdade e à essência* (VII, 525). *Não tem observado, também, que os que são por natureza calculadores tem grande facilidade para todas ou quase todos os ensinos e que até os espíritos* ***lentos****, quando se educam e exercitam no cálculo, ainda que não derivem dele nenhuma outra vantagem, conseguem, pelo menos, tornar-se mais sutis do que eram antes?*(VII,526).
> Estas são as razões pelas quais Sócrates e Glaucón prescrevem, como primeiro, o ensino da aritmética para os cidadãos de sua Cidade. Depois passam a analisar se convém ou não tomar como segundo, o ensino de geometria e a esse respeito, Platão reproduz as seguintes considerações (VII, 527): *Se a geometria conduz a alma a contemplar a essência, não há dúvida de que nos convém, porém nos deter na generalização, não nos convém. Agora bem, não podem nos negar quantos entendem algo de geometria que a natureza dos objetos dessa ciência se opõe por completo à linguagem empregada por quem as pratica. Eles se expressam de maneira ridícula e forjada. Como manejam objetos materiais, eles falam “quadrar”, “estender” e “acrescentar” e assim em todos os casos, porém, a meu ver, este ensino não tem, em seu conjunto outro objeto que o conhecimento. Mas, o seu objeto é o conhecimento que sempre existe e não o que nasce e morre com o tempo. Por conseguinte, será um ensino que atraia a alma até a verdade e faça nascer esse espírito filosófico que eleva nossos olhares às coisas do alto, em ver de volvê-las, como fazemos indubitavelmente, para as coisas daqui debaixo. Assim, devemos ordenar aos cidadãos de tua Calípolis que não se distanciem da geometria, pois não são poucas as suas aplicações secundárias. Quais são estas? Em*

> *primeiro lugar, aquelas que já temos falado que se referem à guerra e depois facilitar o estudo das outras ciências, pois também temos visto que a este respeito há uma diferença absoluta entre o que é verdade em geometria e o que não é* (SANTALÓ, p. 40-41).

Santaló (1994, p. 41) nos explica que Platão, via Sócrates, prescreve o ensino de geometria como o segundo em ordem de importância. Seguem a geometria do espaço ou dos sólidos, a astronomia e a música. Essas regras que prevaleceram durante muito tempo, por toda a Idade Média e constituíam o *Quadrivium*, para o bem pensar (aritmética, geometria, astronomia e música), que junto com o *Trivium*, para o bem dizer (gramática, retórica e dialética), formou os pilares de toda educação.

De acordo com D'Ambrósio (1993, p.45), desde este período a matemática funciona como um filtro – que tipo de cidadão se deseja formar, logo, a partir disto, se determina a matemática que se deve ensinar. De certo modo justificamos e buscamos as raízes dos dois valores da matemática: o utilitarismo e o papel formativo – os que aparecem sempre vinculados à matemática e somente esses dois já geram muitas controvérsias.

No ensino da matemática predomina este movimento pendular, tentando contemplar um ou outro valor. Mas como contemplar os outros valores: cultural, sociológico e estético? O fato de não ser contemplado todos os valores da matemática quando a ensinamos seria o motivo de resultados tão desanimadores, como os que já mencionamos – os resultados do Saeb?

Num artigo intitulado "O drama do ensino de matemática", publicado no jornal Folha de São Paulo, de 25 de março de 2003, (p. 32) a presidente da Sociedade Brasileira de Matemática, Suely Druck comenta:

> A qualidade do ensino de matemática atingiu, talvez, o seu mais baixo nível na história educacional do país. As avaliações não poderiam ser piores. No Provão, a média tem sido a mais baixa entre todas as áreas. O último Saeb mostra que apenas 6% dos alunos têm nível desejado em matemática e a comparação internacional é alarmante: no Pisa (Program for International Student Assessment) de 2001, ficamos em último lugar (DRUCK, 2003, P. 32)

Acrescenta que o pouco valor dado ao conhecimento matemático por uma geração de professores e estudantes, nos leva à conclusão de que não é por acaso que o Brasil conta com enormes contingentes de pessoas privadas de cidadania, por não entenderem fatos simples do cotidiano, como juros, gráficos, etc.

Diante de tal situação, encontramos uma resposta freqüente de que falta uma boa didática aos professores de matemática, mas não podemos nos esquecer que as deficiências de conteúdo e metodologias do professor também levam a aprendizagem a esse nível. Muitas vezes o professor procura licenciaturas em cursos de baixa qualidade, que não valorizam outras metodologias, como modelagem feita na sala de aula ou em laboratórios de matemática, por exemplo.

Assim, como pode haver muitas controvérsias quanto à responsabilidade do cenário descrito, nos limitamos a mencionar que nosso propósito é constatar que, de modo geral, talvez não estejamos ensinando a matemática que deveria ser ensinada. No entanto, não podemos atribuir ao professor ou ao aluno a culpa por tal cenário. Mesmo que o professor esteja bem preparado – conheça a matemática em todas as suas facetas, tenha conhecimentos sobre educação, de modo geral, sobre didática da matemática - não podemos deixar de vê-lo numa teia intrincada de forças que amenizam sua possível potencialidade. Há currículos estabelecidos, por exemplo, que prescrevem uma determinada ação pedagógica.

Segundo D'Ambrosio (1993, p.15) - mesmo por incorporar todos os valores mencionados - não se justifica que a matemática seja ensinada em todos os níveis de escolaridade e com tanta intensidade e ainda sendo praticamente a mesma. Ele menciona que a música ou a pintura são construções lógicas, formais, universais e de uma beleza incrível; o jogo de xadrez ou outros jogos de lógica ou outras disciplinas, tais como: História, Geografia, Português, Filosofia, Psicologia, etc..., também podem ajudar a pensar com clareza e a raciocinar melhor.

Por outro lado, as raízes culturais de um povo não fundamentam a elaboração dos programas de matemática. É mais interessante considerar que o que é bom para os países desenvolvidos, deve ser bom para os outros países. Mas cada grupo cultural tem sua maneira de contar, de classificar, de manejar formas e relações geométricas, ou seja, tem sua própria matemática. Como vencer as barreiras entre uma matemática estabelecida e um modo de matematizar próprio de um grupo?

Segundo D'Ambrósio (1993, p. 15), pode se identificar o ensino que não respeita as raízes culturais dos alunos, por meio de mecanismos negativos, tais como: reprovação intolerável, obsolescência dos programas e a terminalidade discriminatória.

Mas a matemática pode ser ensinada em todos os níveis, como fator de progresso social, como liberação individual e política, como instrumentadora para a vida e trabalho e acrescenta que "a capacidade de manejar situações novas, da vida real, pode ser muito bem ser alcançada mediante modelagem e formulação de problemas, que infelizmente não estão presentes em nossos currículos antiquados" (D'AMBROSIO, 1993, p.16).

Ele segue comentando que a instrumentação para a vida depende, numa democracia, de uma preparação para acompanhar os procedimentos políticos, para isso há a necessidade de alguma capacidade de analisar e interpretar dados estatísticos, de noções de economia e da resolução de problemas de decisão e situações de conflito. Assim, no currículo devem ser incluídos os estudos de estatística, economia e teoria dos jogos. Não há de se menosprezar também as novas tecnologias.

Deste modo, novamente constatamos a importância de refletirmos sobre o ensino de matemática, via resolução de problemas. Até que ponto, tal metodologia pode contemplar os valores da matemática, já especificados. Segundo D'Ambrósio, a resolução de problemas vista de um modo mais amplo - que é a sua proposta, - combina processos modelados e programas de treinamento com criatividade. Para tornar isto presente nas aulas:

> [...] devemos nos voltar para situações "realmente reais". Projetos de natureza global, tais como a construção de uma cabana ou o mapeamento de uma cidade ou a avaliação do consumo d'água, fornecem informações que exigirão o manejar de problemas e modelos. A resolução de problemas ocorre como conseqüência, daí adquire significado e sua solução faz sentido.(D'AMBROSIO, 1993, p.31)

Mas ele alerta para o fato de que situações reais só conseguem entrar na sala de aula, quando simuladas pelo professor(a) que deve ter mudança de atitude com relação à matemática. Assim, nós professores(as), precisamos rever nossas concepções. Cabe ao professor constatar, averiguar, discutir a posição da matemática no ensino, considerando a evolução desta ciência, começando com uma compreensão mais adequada do conhecimento matemático. Por outro lado, faz-se necessário que os cursos de formação de professores contemplem tais questões.

D'Ambrósio (1993, p.35) também explica que para se contemplar todos os valores da matemática, com a introdução das novas disciplinas associadas a esses valores, há necessidade de uma reorganização curricular, partindo para uma nova educação matemática. O valor utilitário, por exemplo, é o mais enfocado na nossa sociedade - imediatista e voltada para o consumismo -, pois tem a capacidade de trabalhar em situações muito próximas da realidade do educando. Tal ensino tem como conseqüência a frustração do aluno questionador e criativo, com evidente prejuízo para a formação das futuras gerações, que caminham na sua formação escolar sem conhecer a história da matemática, por exemplo. Os aspectos culturais, estéticos e formativos quase não são contemplados.

Matemáticos, filósofos e cientistas, de modo geral, destacam os valor estético da matemática, independente da concepção de belo, tanto na contemplação passiva como na própria atividade de investigação. Segundo Davis (DAVIS, 1995, p. 164), na matemática, o juízo estético existe, é importante e pode ser cultivado e transmitido de professor para aluno. Acrescenta que cientistas clássicos e medievais, como Kleper, louvaram a "proporção áurea"; para Poincaré (apud BOYER p. 441), o elemento dominante na criatividade matemática é o estético, e não o lógico; para Hardy (apud DAVIS, 1995, p. 164), os padrões do matemático devem ser belos como os do pintor ou os do poeta; para Dirac (p. 164), nas equações, a beleza é mais importante do que o ajustamento aos resultados experimentais.

Mas, em que medida a Resolução de Problemas pode contemplar os valores que explicitamos?

CAPÍTULO 4

4.1 Que valores da matemática podem estar presentes quando nos valemos da metodologia de Resolução de Problemas, segundo G. Polya?

O processo de ensino/aprendizagem que se dá em ambientes escolares, principalmente nas salas de aula, ambiente a que nos referimos, envolve inúmeras relações entre os alunos; entre o professor e os alunos; entre eles, os assuntos matemáticos e concepções sobre educação, escola, matemática...enfim uma visão de mundo, tanto dos alunos como dos professores...sem considerar todo o entorno – as instalações físicas, o local onde os alunos vivem - e assim por diante.

Deste modo, ao empreender estas análises, não queremos enfatizar que ela dará conta dos valores da matemática que acreditamos possa dar, uma vez que cada professor terá uma leitura das idéias de Polya permeada por todas as suas concepções. Tais concepções se fizeram e se transformaram também em decorrência de experiências com o ensino da matemática.

Mencionamos, na esteira de D'Ambrósio (1993, p.28), os valores da matemática, a saber: utilitário, cultural, formativo, sociológico e estético. Como contemplar esses valores nas nossas salas de aula?

Inicialmente, precisamos construir a curiosidade dos alunos, uma vez que ela auxiliará o professor a conduzir os alunos nas suas reflexões. Sem as qualidades de sentimentos, sem a sensação diferenciada proporcionada pela curiosidade aguçada, os alunos não tomarão como suas as tarefas ou os desafios apresentados pelo professor.

> A curiosidade como inquietação indagadora, como inclinação ao desvelamento de algo, como pergunta verbalizada ou não, como procura de esclarecimento, como sinal de atenção que sugere alerta faz parte integrante do fenômeno vital. Não haveria criatividade sem a curiosidade que nos move e que nos põe pacientemente impacientes diante do mundo que não fizemos, acrescentando a ele algo que fazemos. (FREIRE, 2002, p. 35).

Assim sendo, a escolha dos problemas é a primeira tarefa do professor. Caso a escolha não seja compartilhada com os alunos, então a tarefa se torna mais difícil. O problema deve ter elementos significativos para a maior parte dos alunos da sala, pelo menos, e eles envolvem também conhecimentos matemáticos. Polya enfatiza que se um professor de matemática desafia a curiosidade dos alunos apresentando-lhes problemas compatíveis com os seus conhecimentos e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente.

Mas, vamos para alguns exemplos. Optamos por discutir os valores por meio de alguns problemas.

Na quinta série do ensino fundamental, usualmente, se propõem o ensino de regiões poligonais e suas áreas. Considere o seguinte problema: Qual a quantidade de diagonais de um eneágono convexo?

Admitindo que o professor não demonstrasse ainda a fórmula para a quantidade de diagonais de polígonos convexos – o que o tornaria um problema rotineiro na classificação de Polya - pois para resolvê-lo bastaria o aluno substituir "n", por 9 e efetuar os cálculos, com a fórmula: $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$, onde n indica a quantidade de lados e D_n , a quantidade de diagonais do polígono, - com tal problema se busca regularidades, padrões de repetição..., procedimentos presentes na generalização, um tipo de raciocínio – que junto com a abstração - predominam na matemática.

Ao resolver o problema seguindo os passos propostos, no primeiro passo buscamos os dados e a incógnita e, em seguida, no segundo passo, elaboramos um plano para resolução. Os alunos podem sugerir que se construa um polígono convexo de 9 lados e que se trace as diagonais. Assim, está resolvido o problema.

Mas se o professor observar atentamente o quarto passo verá que poderá propor um novo problema ou conduzir os alunos a propor esse novo problema, perguntando aos alunos: Quantas diagonais têm um polígono de 10 lados? E de 20 lados? O problema alvo é o seguinte: Qual a quantidade de diagonais de um polígono convexo de n lados, onde n é um número natural maior do que ou igual a 3?

No passo da elaboração do plano, ao sugerir que os alunos construam polígonos convexos de 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 lados....e encontrem regularidades no modo como traçou e fez a contagem das diagonais, que coloquem os resultados obtidos em uma tabela, o professor auxilia o aluno na busca da “fórmula” ou da regra geral. Neste caso, sendo sutilmente conduzido, o aluno experimentará o prazer da descoberta. Ele verá esta fórmula final como uma construção sua. Problemas deste tipo - e assim conduzidos - podem incutir nos alunos o gosto pelo raciocínio independente. Por outro lado, é o “fazer matemático” que está presente.

Problemas de demonstração também podem estar presentes nas aulas do ensino fundamental. Por exemplo, tomando como ponto de partida o Teorema de Pitágoras e as propriedades de triângulos eqüiláteros, o professor pode propor o seguinte problema: Expressar a altura de um triângulo eqüilátero em função da medida do lado, dada por l unidades? Antes deste problema, também o professor pode solicitar que o aluno calcule a altura de um triângulo eqüilátero cuja medida do lado é 5 cm, por exemplo, e, em seguida, solicitar que repita o procedimento para triângulos cujos lados medem l unidades. Estes procedimentos podem ser contemplados no 4º passo proposto por Polya. Deste modo, a generalização e a abstração podem ser resgatadas. Logo, o valor formativo pode ser contemplado desde as séries iniciais. Este valor também está imbricado com o valor estético, pois afinal se valer de propriedades e teoremas para construir novos resultados no qual as idéias se conectam com uma certa sintonia, com coerência...é admirável.

Na ciência e na arte um dos princípios que orientam as seleções durante o processo de criação é a beleza. Segundo Poincaré (1854 - 1912), as idéias que se apresentam como hipóteses, só assim se colocam porque são idéias que têm beleza. Nas suas palavras, citadas em Ostrower (1998, p. 289):

> De um modo geral, os fenômenos inconscientes privilegiados, aqueles que se tornam conscientes, são os que diretamente ou indiretamente afetam de modo mais profundo a nossa sensibilidade. Talvez seja surpreendente evocar a sensibilidade emocional a propósito de demonstrações matemáticas, que aparentemente poderia só dizer respeito ao raciocínio. Mas isto seria esquecer os sentimentos de beleza matemática, de harmonia de números e formas, de elegância geométrica. Este é um sentimento verdadeiramente estético, que todos os matemáticos conhecem muito bem e que, sem dúvida, pertence à sensibilidade emocional.

Os matemáticos vislumbram a beleza. A arte também. Os versos de Fernando Pessoa (1995) deixam esta idéia clara: “O Binômio de Newton é tão belo quanto Vênus de Milo. O que há é pouca gente para dar por isso”. A beleza a que o poeta se refere não é a beleza como

> [...] meramente bonito ou agradável (sendo o conceito do "bonito ou feio" um dado do gosto subjetivo da pessoa, ou então uma convenção social e, portanto, cambiável ao longo dos tempos). Trata-se da beleza como verdade interior da forma, como uma ordenação, onde todos os componentes e todos os relacionamentos formais entre eles se apresentam necessários e plenamente significativos. Nela também se integram as tensões — nunca anuladas e sim contrabalançadas e compensadas — resguardando a complexidade e o vigor da forma. Assim, nesta sua intensidade e autenticidade, as formas se tornam belas, de uma beleza imanente e vibrante, comovendo-nos com a verdade que elas incorporam. (OSTROWER 1998, p. 286).

Abstrair significa afastar-se, separar. O artista que deseja pintar 10 maçãs, por exemplo, verá que elas não são idênticas. Associar uma forma esférica a uma maçã é uma abstração... é eliminar as rugosidades da maçã... é tentar buscar o movimento do contorno comum a todas as maçãs. Assim, a abstração faz parte de qualquer obra de arte, quer o artista saiba disto ou não. Este processo não era plenamente controlado até o renascimento, quando, então, os artistas começaram a analisar as formas da natureza em termos de entidades matemáticas. No caso do problema das diagonais de um polígono convexo, o resultado da generalização é a fórmula: $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$, que possibilita calcular a quantidade de diagonais para qualquer polígono convexo de n lados. Por outro lado, não se obteve tal resultado sem um caminhar da abstração... o distanciamento de um objeto particular, de um polígono de 9 lados, por exemplo, ao buscar um padrão de repetição no traçar das diagonais.

Mas, a pintura abstrata de hoje pouco tem a ver com a abstração lógica ou matemática. Ela é inteiramente concreta, sem simular um universo de objetos ou conceitos que existam fora da moldura. Por exemplo, uma esfera numa pintura abstrata não deve ser apreendida como uma intuição matemática, mas deve ser uma forma viva e expressiva.

Schapiro (2001, p. 10 -11) ao comparar o trabalho de um matemático ao de um pintor abstrato comenta que se um pintor entrar em uma aula de matemática e observar o quadro com inúmeras palavras, letras e diagramas, não se importa com o significado e com a coerência das idéias ali representadas, mas com a disposição das linhas e das palavras, com o tipo de traçado utilizado. Um gráfico, para o matemático, é uma ilustração de um conceito e um apoio para o entendimento do mesmo. O matemático não se importa se o gráfico foi desenhado no centro ou no canto do quadro, se as suas linhas são finas ou grossas, uniformes ou não - a construção do significado destes signos para o matemático independe destes detalhes. Mas, para o pintor são essas qualidades que importam, são as pequenas inflexões nas linhas, o modo como foram dispostos no quadro-negro etc.

Mas, há de se resgatar também o valor sócio-cultural da matemática com resolução de problemas. Os problemas podem resgatar o vínculo das descobertas matemáticas com o contexto, o meio sócio-cultural? Vejamos o problema: Uma pessoa depositou uma quantia de R$ 1.000,00 em um banco que lhe pagará 10% de juros ao final de cada ano. Se os juros forem creditados semestralmente, qual a quantia que esta pessoa terá ao final de 3 anos?

Ao se fazer o retrospecto, o professor poderá propor que os alunos verifiquem o que ocorre com a quantia se os juros forem creditados em intervalos de tempo cada vez menores... três meses, dois meses, um mês, uma semana, um dia, uma hora, de minuto a minuto...

Este problema foi proposto, no século XVII, pelo matemático Jacques Bernoulli, da seguinte maneira:

> [...] como cresceria um depósito bancário ao longo do tempo se os juros, ao invés de serem creditados anualmente ou semestralmente, o fossem em intervalos de tempo cada vez menores, até que os acréscimos pudessem ser considerados instantâneos e sobre eles, imediatamente, também incidissem as mesmas taxas de juros? (GARBI, 1997, p. 103).

Ao resolver este problema você levará o aluno a descobrir o número “e”. Euler continuou as pesquisas com esse número. As funções que envolvem o número e = 2,7182818284..., por ele estudadas, são importantes na Física e na Engenharia. Assim, ao buscar a história da matemática elaboramos problemas que possibilitam resgatar o quanto as descobertas matemáticas podem estar atreladas as necessidades do meio. Por outro lado, no contexto, ao se mencionar as transformações da sociedade neste século, por exemplo, vêm à tona especificidades da nossa cultura. Não propomos que sejam discutidas estas questões, profundamente, nas aulas de matemática. Mencionar o contexto, em linhas gerais, é suficiente. Por outro lado, o retorno à origem histórica de diversos conceitos matemáticos evitará que se reforce a crença de caráter “gratuito” aos descobrimentos, caráter este que causa prejuízos ao entendimento do “fazer” desta ciência.

E quanto ao valor utilitário? Podemos exibir, por meio de problemas, o valor utilitário da matemática tanto como instrumento para a vida como para o trabalho. Quando se ensina matemática aplicada tratamos desses dois aspectos.

Vejamos o problema:

Calcule a área de um lote de terreno na esquina formada por duas ruas que determinam entre elas um ângulo de 60º. Na figura, o setor circular hachurado está contido em um círculo cujo raio mede 9 metros. Observar os outros dados especificados na figura 1.

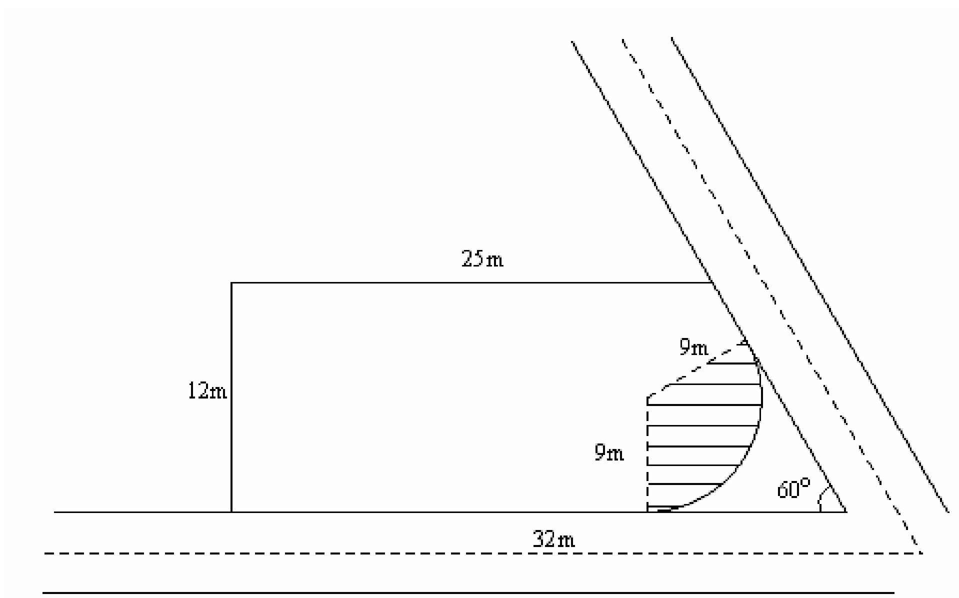

figura 11

Tal problema exibe a dupla utilidade da matemática, uma vez que o problema pode se referir a uma situação vivenciada por um cidadão que adquire uma propriedade com estas características ou ainda uma situação cotidiana do trabalho de um agrimensor.

Por outro lado, problemas que enfatizam a utilidade da matemática no cotidiano potencializam no aluno, as possibilidades de "leitura matematizada" do mundo ao redor, o que precisa ser incrementado, basta lembrarmos dos resultados dos exames discutidos no capítulo 3 (p.55 - 56).

Deste modo, resgatamos a importância dos passos propostos por Polya no ensino da matemática, notadamente pelo segundo e quarto passos. O segundo abre "uma janela" para a criatividade do aluno e o quarto traz para a sala de aula especificidades do "fazer matemático". Quanto aos valores, todos podem ser devidamente resgatados, se o professor primar pela seleção dos problemas.

Os problemas, na prática, não são resolvidos na seqüência proposta por Polya, por todos os alunos. Precisamos ver tal divisão, como algo didático, pois na prática elas não têm intersecção vazia, uma vez que à medida que se lêem e se organizam os dados - quase que ao mesmo tempo - podem emergir idéias de como resolver tal problema.

No entanto, tal seqüência auxilia os alunos a organizarem as suas idéias e as resgata com a ajuda do professor. Esses procedimentos podem que realimentar processos de descoberta. Afinal, quando descobrimos algo, não sabemos como chegamos naquela idéia de modo claro, mas se ela se deu, então, o seu processo de construção talvez possa ser refeito. Polya (1978, p.54) comenta que a solução de um problema pode aparecer de forma repentina.

Não convém aos alunos que o professor traga os resultados prontos. O “fazer matemático” deve ser contemplado nas aulas. Talvez o mais adequado para que o aluno venha a se envolver seja a instauração desses momentos – um clima com sentimentos – onde reine o prazer em relembrar, em observar conhecimentos aplicados, em perceber a curiosidade emergir, enfim momentos nos qual o aluno possa pressentir que ele vai descobrir algo. Este é o motor para desencadear raciocínios... Não há pensamento auto-controlado, que não seja movido por algum tipo de sentimento.

Assim, as idéias dos alunos não podem ser menosprezadas. O professor deve entender como o aluno está pensando para poder conduzi-lo a algum tipo de descoberta. Elas podem ser sutilmente adaptadas, no início, pois à medida que o aluno se envolver nas aulas, tal intervenção pode se amenizar. O professor é mais que orientador. Ele é, digamos, inicialmente, manipulador, uma vez que conhece os caminhos para se chegar a uma solução ou a possíveis soluções de um problema. Assim, o professor está (re)descobrindo ou (re)construindo, enquanto os alunos fazem tal tarefa pela primeira vez.

Há diferenças entre a ciência acabada e seus modos de construção. Para compreender o produto de uma ciência precisamos conhecer o produto vinculado ao seu processo de construção.

Moles (1998) destaca a importância de diferenciarmos a ciência acabada, da ciência acoplada ao seu processo de construção. Para tornar mais clara a diferença, faz uso da comparação: a ciência acabada está para o seu processo de construção assim como o edifício está para o modo como este foi construído.

Percebemos isso de forma intensa na matemática. As dificuldades de seu ensino, nos diversos níveis, podem ser atribuídas, de modo geral, ao fato de que esta se faz presente em aula, pronta e acabada, distante das origens empíricas dos conceitos que ela trata, ou de possíveis aplicações. Assim, o processo de construção, os modos de (re)elaboração dos conceitos permanecem ocultos, fazendo com que nos distanciemos desta ciência, cada vez mais. Por isso, ela nos parece inacessível e possível de ser compreendida ou utilizada somente por alguns poucos humanos geniais.

Ocultando os seus processos de construção, as ciências se distanciaram cada vez mais a quem, principalmente, devia interessar, ou seja, aos não cientistas. Não revelando os processos, afasta-se a concretude das idéias e os produtos exibidos são abstrações. Os significados são por nós construídos quando abstraímos e não quando lidamos com abstrações. A ciência acabada não consegue dialogar, de forma abrangente, com os humanos não inseridos na comunidade que a produziu!

O julgamento de uma obra de arte ou de uma ciência pode não ser adequado se deixarmos de lado a forma como seus produtos foram gerados. Para Valéry (1998, p.19):

> [...] certos trabalhos das ciências, por exemplo, e os da matemática em particular, apresentam uma tal limpidez em sua armação que poderíamos dizer que são obras de ninguém. Têm algo de inumano. Essa disposição não deixou de ter a sua eficácia. Fez supor uma distância tão grande entre determinados estudos, como as ciências e as artes, que os espíritos originários foram dele totalmente separados na opinião pública e exatamente na mesma medida em que os resultados de seus trabalhos pareciam sê-lo.

O autor compara esse distanciamento entre a matemática acabada e a matemática com seus modos de construção, elaborada pelo ser humano e necessária para este refinar sua visão de mundo - contemplando aspectos quantitativos e transformando qualidades em quantidades -, com o existente entre ciência e arte.

Não revelando o processo de criação, a obra acabada nos conduz a empreendermos uma análise que contempla somente a materialidade e a finalidade de seus produtos que, sem dúvida, são distintos. Segundo Valéry (1998, p. 19), os produtos

> só diferem com relação às variações de um fundo comum, pelo que dele negligenciam, ao formarem suas linguagens e seus símbolos. Deve-se, portanto, desconfiar um pouco dos livros e das exposições demasiado puras. O que está fixado nos ilude, e o que é feito para ser olhado muda de aparência, se enobrece. E sendo movediças, irresolvidas, ainda à mercê de um momento, que as operações do espírito nos vão poder servir, antes que a tenhamos chamado divertimento ou lei, teorema ou coisa de arte, e que se tenham afastado, ao se completarem, de sua parecença.

Para nos envolvermos, de fato, com os produtos da ciência e da arte, ou seja, para podermos realizar leituras diferenciadas do real por meio destes produtos, precisamos problematizar a relação produto/processo de produção.

De certo modo, estas idéias vêm ao encontro do que Polya coloca sobre a contribuição da Resolução de Problemas para exibir duas facetas da matemática.

> Pelo estudo do método de resolução de problemas, percebemos um novo aspecto da matemática. Sim, porque ela tem dois aspectos: é a rigorosa ciência de Euclides, mas é também uma outra coisa. A Matemática, apresentada da maneira euclidiana, revela-se uma ciência dedutiva, sistemática, mas a Matemática em desenvolvimento apresenta-se como uma ciência indutiva, experimental. Ambos os aspectos são tão antigos quanto a própria ciência. Mas o segundo aspecto é o novo sob um certo ponto de vista: a Matemática “in statu nascendi”, no processo de ser inventada, jamais foi apresentada exatamente desta maneira aos estudantes, aos professores ou ao grande público (POLYA,1978, p. vii).

Logo, a metodologia de Resolução de Problemas, que traga para as salas de aula diferentes contextos, pode colaborar para o entendimento do "fazer matemático" e, conseqüentemente, para o entendimento das idéias matemáticas.

4.2 Que valores da matemática podem estar presentes quando nos valemos da metodologia de Resolução de Problemas e modelagem matemática?

A modelagem matemática – como método de ensino de matemática - transforma problemas da realidade em problemas matemáticos e deve cuidar de resolvê-los, via matemática. Por outro lado, também é importante a interpretação das soluções ou prováveis soluções, tanto na linguagem matemática como na linguagem coloquial, uma vez que ela deve se tornar clara para as pessoas em geral, que têm acesso à linguagem matemática em diversos níveis de complexidade. Pode-se falar em função, de forma mais sistematizada no ensino médio, e em algumas séries do ensino fundamental, pode-se tratar do mesmo conceito com menor grau de sistematização.

A expressão de uma relação entre duas ou mais grandezas pode ser o modelo para explicar uma porção da realidade, o que pode ser visto no exemplo do Capítulo 2 (pág. 52).

Ao aplicar a Modelagem Matemática, o professor traz para a sala de aula uma matemática viva, vinculada à vida do aluno, podendo, deste modo, tornar o processo de ensino/aprendizagem de matemática mais efetivo. Os alunos podem participar mais ativamente das aulas, buscando dados, organizando-os, relacionando-os com os conhecimentos matemáticos, discutindo as soluções encontradas. O professor passa a ser visto, pelo aluno, não como aquele que detém o saber matemático e tem a função de transmiti-lo, mas como alguém capaz de conduzi-lo na construção dos conhecimentos matemáticos.

Que valores da matemática trazemos para as nossas aulas – ou podemos contemplar nas nossas aulas de matemática – quando utilizamos a modelagem matemática?

O valor utilitário da matemática é amplamente contemplado quando nos valemos deste método de ensino. Mas, há riscos de que o ensino por meio deste método se reduza à aplicação de modelos matemáticos, já construídos por outros, que não os alunos e o professor na sala de aula. Assim, o ensino trataria de ajustes de um modelo a uma situação da realidade.

A Matemática é uma ciência puramente hipotética, ou seja, ela é indiferente quanto às suas premissas expressarem fatos imaginados ou observados. “A possibilidade de as abstrações matemáticas serem tratadas como algo em si, desvinculados do substrato empírico que as engendrou, não pode ser negada” (MACHADO, 2001, p.53). Assim, à matemática aplicada caberia a tarefa de inventariar como as descobertas matemáticas são aplicadas. A modelagem matemática possibilitaria o ensino de matemática aplicada.

O pensamento matemático por mais que tente libertar–se da experiência, constituir-se num sistema independente, que se nutre de si próprio, que progride em função de suas necessidades, parece trair-se a cada momento, a revelar em suas raízes os “resíduos da experiência concreta”. “As abstrações matemáticas que desempenham papéis relevantes na teoria têm um conteúdo geométrico ou um significado físico que denunciam sua origem na experiência sensível, independente de terem, os que as manipulam, clara consciência disso”. (MACHADO, 2001, p. 52).

Desse modo, faz-se importante tratar da relação matemática pura x matemática aplicada nas nossas aulas, até por resgatar esta faceta do conhecimento matemático enfatizada por Machado.

Alguns matemáticos, segundo Machado (2001, p. 53-54), tentam se manter distantes de figuras geométricas ou de objetos empíricos. Mas há conceitos fundamentais da Matemática, como o de derivada, por exemplo, para o qual não se pode contestar as suas raízes geométricas e, principalmente, a Física. A noção de velocidade, as taxas de variação, a noção de reta tangente foram o ponto de partida para a abstração, que culminou com o conceito de derivada. Ele observa que para um aluno compreender o conceito de velocidade de uma partícula ele não precisa conhecer antes, a noção de derivada.

Assim, a maneira como o professor se valerá da modelagem matemática depende da sua concepção de matemática, de como ele vê a relação entre matemática pura e aplicada. Por outro lado, a possibilidade de contemplar outros valores, além do utilitário, está atrelada às situações estudadas e à ênfase que o professor poderá dar nas discussões que envolvem a adequação ou não do modelo encontrado.

Novamente ao empreender a análise dos valores contemplados encontramos uma relação forte com o contexto, ou seja, com o que se anuncia no problema ou nos assuntos de que ele trata, não só os matemáticos, tal como discutimos com os passos de Polya.

Segundo D'Ambrósio (1993, p. 28) os valores: utilitário, cultural, formativo, sociológico e estético são cinco razões...

> [...] igualmente importantes, porém tem havido um crescente desequilíbrio nos últimos cem anos favorecendo a primeira delas, isto é, as utilitárias. Isso é um erro. O caráter errôneo de uma educação matemática orientada fortemente ao utilitarismo é reforçado pelo aparecimento das calculadoras e dos computadores. A educação matemática tradicional é, na verdade, obsoleta e ineficiente. Por outro lado, o utilitarismo não atende à nova ênfase sobre as aplicações aos problemas reais do mundo. (D`AMBROSIO,1993, p..28)

O mesmo autor ainda afirma que mesmo nas recomendações do NCTM – que mencionamos no Capítulo 1 – “[…] a ênfase é dada sobre problemas apresentados de modo formulados, já codificados” (p. 28).

A modelagem matemática poderá ir além do que as outras abordagens de Resolução de Problemas possibilitam se devidamente desenvolvida em aula, ou seja, se assim caracterizada: a partir de uma situação da realidade e de um estudo inicial da mesma – com levantamento de dados qualitativos e quantitativos – identifica–se e formula-se um problema específico, que será, por meio de um processo de abstração, descrito por um modelo matemático. Ao estudar ou resolver o modelo, surgem soluções que mediante análise, poderão ser aceitas ou não. Se aceitas, elas desencadeiam estratégias de ação na realidade e, caso contrário, estuda-se um novo modelo matemático.

Entretanto, como adverte D’Ambrósio (1993, p.28), “[…] situações reais são na verdade situações simuladas e, embora haja o desejo de trabalhar com situações “realmente reais”, essas não conseguem entrar nas salas de aula, a menos que se mude de atitude com relação à matemática“. Mas a modelagem matemática poderia trazer as situações realmente reais para as salas de aula[4].

Ao envolver o aluno com problemas reais estaríamos facilitando a sua socialização e dando-lhe instrumentalização, que demanda muito conhecimento matemático. Portanto, o conhecimento matemático deve ser tratado como

---

[4] GAZETTA, Marineuza, **A modelagem como estratégia de aprendizagem da matemática em cursos de aperfeiçoamento de professores**. (mestrado), Rio Claro, SP: Universidade Estadual de São Paulo, 1989.

instrumental tanto para a vida diária como para vida profissional das pessoas, bem como para outras ciências.

Para Machado (2001, p. 89), ao se ensinar é importante colocar em evidência os vínculos do desenvolvimento da matemática com as necessidades de outras ciências e com as necessidades da sociedade em que é construída e que ajuda a construir, sem deixar de reconhecer a autonomia desse saber, não a reduzindo a fins utilitários imediatistas.

As novas abordagens de Resolução de Problemas dariam conta dos outros valores da matemática, que não o utilitário? No próximo capítulo apresentamos algumas dessas abordagens – problemas abertos, problematização – e tentamos buscar por meio de exemplos as possibilidades de contemplar os diversos valores da matemática.

CAPÍTULO 5

5.1 Formulação de problemas

Comentamos, na introdução, que nos PCN's (BRASIL, 1998 e 1999) se adverte que a resolução de problemas não está sendo explorada em toda sua potencialidade no ensino de matemática. De modo geral, quando essa metodologia é utilizada, os problemas aparecem como aplicação de assuntos já desenvolvidos nas aulas. Quanto à modelagem matemática, para que se consolide como área de pesquisa, é necessário, segundo Fiorentini, como já foi exposto no Capítulo 3, que os pesquisadores adotem uma postura mais crítica e deixem de simplesmente relatar experiências.

Por outro lado, mencionamos no Capítulo 3, os resultados de avaliações realizadas com estudantes de todo o Brasil. Eles indicam que a maior parte dos alunos do ensino fundamental e médio não sabe resolver nem mesmo questões que envolvem assuntos da série que freqüentam.

Seria pertinente que os professores de matemática refletissem sobre o processo de ensino/aprendizagem de matemática envolvendo a metodologia de Resolução de Problemas?

> É fácil colocar a culpa em métodos de aprendizagem precedentes, pelas deficiências apresentadas no desempenho matemático dos alunos e alunas. É fácil culpar modos de ensino e atitudes de professores e professoras. No entanto, a história da Educação Matemática - em especial, das teorias da aprendizagem - têm revelado que as propostas inovadoras, e sua experimentação, formam ciclos, que repetem, algumas vezes, frustrações e improdutividades. (MENDONÇA, 1999, p. 15)

Como exemplo dessas propostas, Mendonça (1999, p. 15) cita o caso da didática da matemática moderna e o das atividades com material de manipulação. Lembro-me, de que certa vez, perguntei para um aluno da 7^a. série: “O resultado da soma de 2x com 3x é igual a...?” O aluno respondeu: “É igual a 3x mais 2x pela propriedade comutativa da adição”.

Isto ocorria com freqüência porque, neste período, acreditava-se que ensinar matemática, não era desenvolver conceitos e fazer aplicações, era levar o aluno a entender as estruturas subjacentes à construção do conhecimento matemático – um conjunto de elementos quaisquer, sobre os quais se definiam algumas operações e que, por gozar de certas propriedades, caracterizava uma estrutura algébrica, por exemplo. Não ensinávamos números inteiros relativos exibindo o quanto eles são necessários nas nossas atividades do dia-a-dia, no entendimento de extrato bancário, por exemplo, mas mostrando como eles se “comportavam” em relação às operações definidas para tais números.

Para Fiorentini (1994, p. 43-44), os principais propósitos do movimento da Matemática Moderna foram: unificar os três campos fundamentais da matemática - geometria, cálculo e álgebra - tendo como elementos unificadores a Teoria dos Conjuntos, Estruturas Algébricas e Relações e Funções; enfatizar os aspectos estruturais e lógicos da matemática em detrimento do caráter mecanizado, regrado, presente até então no ensino desta disciplina escolar e, por fim, promover o retorno ao formalismo sob um novo fundamento, a saber: a linguagem formal da matemática contemporânea e as estruturas algébricas. Para Mendonça (1999, p. 16):

> [...] a reflexão em educação matemática já avançou a ponto de perceber que, em geral, os métodos inovadores de aprendizagem têm alcançado muito pouco dos objetivos esperados, apesar da ênfase na ação do aluno. Na verdade, a reflexão também avançou nos vários campos de estudo que se envolveram com a aprendizagem de matemática, como a Psicologia, a Sociologia, entre outros, reconhecendo que várias destas propostas correspondiam a uma visão idealista do processo de ensino – por exemplo, quase todas traziam na sua essência a idéia de que é possível antecipar os resultados de um processo de aprendizagem – levando a equívocos teóricos e práticos que comprometem todo o trabalho.

Assim, na esteira de Mendonça(1999) nos perguntamos: e quanto à metodologia de resolução de problemas, o que é necessário acrescentar para que ela possa propiciar resultados mais significativos para a aprendizagem dos alunos?

Ainda entendemos que essas possibilidades existem e estão atreladas aos valores da matemática, possíveis de serem resgatados quando ensinamos matemática por meio de resolução de problemas. As abordagens apresentadas contemplam, com diferentes intensidades, alguns desses valores. Destacamos que estas possibilidades são dependentes do contexto – a situação em que o problema emerge ou é construído ou revisto o que, por sua vez, recai muito sobre o entendimento do docente sobre o que é o saber matemático.

Para Mendonça (1999, p. 16), a metodologia de resolução de problemas se pratica de três maneiras: 1.como um objetivo – quando se ensina matemática para resolver problemas (exposição da teoria e resolução de problemas) -; 2. como um processo – quando se prima pelo desempenho e pela transformação do aluno como resolvedor de problemas – e, por último, 3. como ponto de partida – quando o problema é considerado um recurso pedagógico, ou seja, ele se destina a construção dos conhecimentos pelo aluno. Vejamos as três maneiras, por meio do exemplo:

"A idade que eu tenho atualmente é igual ao dobro da idade que você tinha, quando eu tinha a idade que você tem. Somando nossas idades atuais obteremos 42 anos. Quais são as nossas idades?"

Se o professor toma a metodologia como objetivo, então este problema seria apresentado após a exposição da teoria sobre resolução de sistemas lineares do 1^{o}. grau, para controlar a aprendizagem deste assunto e ou treinar técnicas para a resolução de sistemas lineares. Mas se o mesmo problema fosse apresentado para que os alunos tentassem descobrir os procedimentos necessários para resolvê-lo – pelo método da tentativa e erro, ou procurando esquemas para auxiliar na resolução – fazer desenhos ou diagramas para voltar no tempo e descobrir as idades, no exemplo - culminando com a sistematização de tais procedimentos, então a metodologia é entendida como processo de ensino.

Por outro lado, se o professor considera a resolução de problemas como ponto de partida para desencadear um processo de aprendizagem, então por meio do problema o professor faz questionamentos, orienta o aluno na organização das suas idéias e o conduz a conjeturar sobre outras equações algébricas, sistemas, com maior quantidade de incógnitas e equações.

De um modo geral, essas três maneiras ainda se valem de problemas de “texto pronto” como menciona Mendonça (1999, p. 7). Mas que dificuldades se apresentam no texto pronto? É possível reverter isto e em que aspectos tal reversão contribuiria para trazer para as aulas os valores da matemática?

5.2 Formulação de problemas: um exemplo

Por meio de um exemplo, ou seja, vamos formular um problema e mostrar como alguns valores da matemática, provavelmente não apresentados nas outras abordagens, emergem sem dificuldades.

A situação que relato é hipotética, no entanto, pode ser adaptável (tem sintonia com o meio) a inúmeras salas de aula.

O professor vai desenvolver o conceito de função para uma 8ª série do ensino fundamental. Ele tem clareza de que tal conceito precisa emergir de uma situação da realidade do aluno, significativa para, pelo menos, a maior parte dos alunos da sala.

Ele não tem idéia de como a tarefa se dará... qual o problema que poderá vir nas discussões com os alunos, ou seja, não conhece exatamente os caminhos, no entanto, o delinear dos caminhos será guiado pelo conceito ou pelo assunto que almeja trabalhar.

Mas, por conhecer as redondezas em que a escola está instalada, ou saber detalhes do bairro em que a escola está localizada, pergunta aos alunos: “Qual o preço de uma casa neste bairro?”

Certamente os alunos vão responder que depende de onde a casa está localizada... se está próxima à escola, ou nas ruas mais distantes ou ainda...na “favelinha” que fica do outro lado da estrada...

Outro questionamento... , mas qual é o tamanho da casa?

O professor ciente de toda esta problemática já constata se o assunto despertou o interesse ou não... Assim que percebe certo interesse da classe lança a pergunta: Em média, qual o custo de um imóvel residencial no bairro?

Como o professor conhece o bairro, propõe então que os alunos se dividam em grupos – grupos dos que moram na parte A (cercanias da escola e mais próximo às ruas de comércio); parte B (um pouco mais distante da escola e só residências) e parte C (do outro lado da estrada e com residências precárias – “favelinha” do bairro), para facilitar na busca por informações. Trata-se de um pequeno bairro e cortado por uma estrada.

Esses grupos vão descobrir o preço por m^2 do terreno, a área que predomina para os terrenos e o preço por m^2 da construção, bem como a área média construída em cada local. Todos os alunos vão procurar saber desses valores junto aos familiares – se são pedreiros ou empregados da construção civil – ou em construtoras com sede no bairro. O professor deve orientar os alunos na realização da tarefa, auxiliando-os a delinear os caminhos a serem seguidos e aprendendo com os alunos a superar os obstáculos que aparecerem.

Nas aulas, de posse dos dados, o professor deverá orientar para que os grupos construam tabelas e exprimam os seguintes valores, para cada uma das partes do bairro: a)o preço, por m^2, do terreno; b) a área média do terreno; c) o preço, por m^2, de construção (material e mão de obra) e d) a área média das casas (a área construída). Isto pode ser feito na lousa também, os alunos em parceria com o professor.

As tabelas com os dados constituem o ponto de partida para os alunos elaborarem uma "fórmula" ou uma "expressão algébrica" para o custo do imóvel em cada uma das partes do bairro. Se fixadas as medidas das áreas do terreno e do imóvel residencial, o custo do imóvel dependerá de duas variáveis: o preço (por m^2) do terreno e o preço (por m^2) do imóvel residencial.

Assim, os alunos podem obter expressões do tipo C (x , y). Obtém-se, assim, uma função de duas varáveis.

A função, para o imóvel da "favelinha", pode ser expressa por: $C(y) = 30y$, uma função linear, uma vez que os proprietários constroem suas casas nesses terrenos, sem pagar por eles... , eles se apropriam dos terrenos.

O que há de novo nestas conversas, encontros e desencontros entre os alunos e o professor? O professor, guiado pelo objetivo que pretende alcançar, deve propor uma discussão que conduza ao entendimento do conceito de função. É este objetivo que vai fazer prevalecer os encontros. O aluno se envolve, dá sugestões, procura dados...e o professor com sutileza seleciona os elementos necessários.

O problema não forneceu dado algum..., eles foram construídos, obtidos de situações reais. Não havia assunto matemático para aplicar...,ele foi descoberto pelo aluno, sob a orientação do professor. O professor não sabia a resposta do problema. Diversas respostas foram encontradas pelos alunos.

Neste caso entendemos que faz uma diferença significativa para o aluno perceber que o professor não conhece a resposta. O interesse, por parte do aluno, em fazer do problema, um problema seu, pode ser maior, uma vez que ele tem liberdade de procurar as respostas por caminhos que ele mesmo delineia. O professor desencadeia toda a situação-problema.

Mas as atividades envolvendo funções, não necessariamente precisam ser concluídas ao se encontrar a expressão para a função. Faz-se necessário ainda que o professor proponha tarefas aplicando o resultado encontrado, como atribuir outros valores para as variáveis, por exemplo. Esse movimento de casos particulares para o abstrato (a fórmula para o custo do imóvel em geral) e depois da fórmula para uma outra situação particular é importante para que o aluno atribua significados ao conceito de função e perceba o movimento de particulares para uma expressão geral e o movimento inverso também.

Por outro lado, a tarefa do aluno não pode parar na simples constatação, ou seja, efetuar os cálculos e verificar o custo de um imóvel em cada uma das partes do bairro. Este nível de linguagem é adequado até a 4ª ou 5ª série do ensino fundamental. Nas outras séries a sistematização – obtenção da fórmula, no caso – e depois as aplicações são imprescindíveis. Exige-se um maior grau de complexidade nas maneiras de representar ou mesmo interpretar resultados. Se isto não for realizado com cuidado o aluno não avança no entendimento da matemática.

O professor deve conduzir o aluno na sistematização dos dados. São esses momentos que possibilitam que o aluno incorpore a matemática como linguagem.

O problema que formulamos permitiu tratar nas nossas aulas do valor formativo – nos valemos do pensamento generalizador – exibimos a matemática como uma linguagem que nos permite interpretar situações do nosso meio – instrumentalizadora - e ainda podemos contribuir para a sensibilização do aluno para problemas sociais, caso o professor esteja disposto a ir adiante.

Há outros conceitos que podem ser desenvolvidos, como o conceito de razão. Pode-se trabalhar com a quantidade média de pessoas que residem nos três tipos de residências estudadas e também com as áreas livres e construídas de cada tipo de terreno. O cenário que descrevemos é um pedaço do mundo e traz nele toda uma gama de situações a ser exploradas, o que demanda por ”bons olhos” do professor.

> A prática pedagógica da matemática é um motivo fecundo para a transformação social – professor de matemática pode atuar não só no desenvolvimento do educando como ser cognitivo, mas também, como ser social e político, aguçando-lhe o espírito crítico de modo a torná-lo capaz de contribuir para o desenvolvimento de uma sociedade democrática (MENDONÇA, 1999, p. 18).

Apesar de este exemplo conter vínculos com o dia a dia dos alunos, não podemos afirmar que a formulação de problemas só trará bons resultados se guardarem esta característica. Os problemas do dia a dia, às vezes mesmo parecendo ser simples, podem apresentar dificuldades na construção do conhecimento matemático necessário para interpretá-lo.

O problema que formulamos trouxe como resposta uma função de duas variáveis. As funções estudadas na escola básica são todas as funções de uma variável real. Assim, o professor precisa se distanciar um pouco da matemática apresentada nos livros didáticos atuais dessas séries.

Nas aulas de matemática para estudantes de Administração de Empresas quando desenvolvia Resolução de Sistemas Lineares – os exercícios envolviam resolução de sistemas –problemas rotineiros, um dos alunos me apresentou o seguinte problema:

"Professor, eu preciso ir a São Paulo fazer compras para a loja dos meus pais e ele me encarregou de comprar 52 pares de três tipos de sapatos, que em suas respectivas caixas se acondicionam perfeitamente no porta-malas do nosso carro, sem sobrar espaço e para essa compra reservou R$ 1.130,00. Já liguei para o vendedor e ele me informou os preços de atacado: sapato feminino: R$ 15,00; sapato masculino: R$ 25,00 e um tipo de tênis por R$ 30,00. Eu gostaria de saber, de quantas maneiras eu posso fazer essa compra?"

Apresentei o problema para a classe e alguns grupos de alunos conseguiram montar o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 52 \\ 15x + 25y + 30z = 1.130 \end{cases}$$

Cuja forma escalonada é a seguinte:

$$\begin{cases} x + y + z = 52 \\ \quad 2y + 3z = 70 \end{cases}$$

Um dos colegas de classe argumentou: "Esse problema têm duas equações e três incógnitas, então ou é incompatível ou é compatível e indeterminado, tendo infinitas soluções".

O aluno que apresentou o problema diz: “Não pode ter infinitas soluções, pelo fato do número de sapatos de cada tipo ser números inteiros positivos, o número de soluções não é limitado?”

A pergunta do aluno mobilizou a classe. Até então as variáveis dos sistemas poderiam assumir valores reais.

A solução apresentada foi a seguinte:

$$(x, y, z) = (17 + \frac{z}{2}\ ,\ 35 - \frac{3z}{2}\ ,\ z)\ \text{e como}\ 35 - \frac{3z}{2} > 0 \Rightarrow\ z < 23{,}3$$

“Se z for igual a 23, isto é, se eu comprar 23 pares de tênis, terei:

$y = 35 - \dfrac{3 \times 23}{2} = 0{,}5$, que é uma incoerência, pois como vou comprar meio par de sapatos masculinos.?" Mas, se z for igual a 22, obteremos; $y = 35 - \dfrac{3 \times 22}{2} = 2$ pares de sapatos masculinos.

Conclusão: O número de soluções é limitado conforme advertiu o aluno. Observando a expressão para x, concluímos que para que ele seja inteiro é necessário que z seja par. Assim,

$$z \in \{2, 4, 6, 8, \ldots\ldots., 20, 22\}$$

Por exemplo, se $z = 10$, comprarei 10 pares de tênis;

como $x = 17 + \dfrac{z}{2}$ então $x = 17 + \dfrac{10}{2} = 22$ pares de sapatos femininos

e

$y = 35 - \dfrac{3 \times 10}{2} = 20$ pares de sapatos masculinos.

Total: da compra: $10 \times 30{,}00 + 20 \times 25{,}00 + 22 \times 15{,}00 = 1.130{,}00$ reais.

Todas as possibilidades para a compra são:

(28, 2, 22); (27, 5, 20); (26, 8, 18); (25, 11, 16); (24, 14, 14); (23,17, 12);

(22, 20, 10); (21, 23, 8); (20, 26, 6); (19, 29, 4); (18, 32, 2).

Quando os problemas envolvem situações reais, as discussões sobre a adequação das respostas se tornam ricas. Se fosse um exercício – simplesmente de aplicação do algoritmo – o aluno não iria tratar de ajustes às situações reais.

Ainda, quando trabalhamos com situações reais, que não necessariamente atreladas ao dia a dia, a matemática que se apresenta nem sempre segue a linearidade presente nos livros didáticos, ou seja, os assuntos seguem uma seqüência: A, B, C, D,...,M,... onde para se entender o C precisa-se, necessariamente, aprender o A e o B. Assim, o professor precisa constatar que o aluno pode aprender o C, sem antes ter aprendido o A e o B. Ainda, no nosso exemplo, porque o aluno precisaria estudar inicialmente uma função dependente de uma só variável? No contexto a função de duas variáveis surgiu espontaneamente.

> De um modo geral, a organização linear perpassa o conjunto das disciplinas escolares, embora seja especialmente aguda no caso da Matemática. Aqui, talvez em conseqüência de uma associação direta entre linearidade e formalismo, entendido como a organização dos conteúdos curriculares sob a forma explícita ou disfarçada de teorias formais, parece certo e indiscutível que existe uma ordem necessária a apresentação dos assuntos, sendo a ruptura da cadeia, fatal para a aprendizagem. (MACHADO, 2001, p. 188-189).

Ao formular problemas, como o do exemplo, rompemos com a idéia de que a cadeia linear de temas precisa necessariamente ser percorrida na ordem apresentada. Assim, trazemos para as salas de aula a complexidade do real – que não segue o molde acima apresentado - ou seja, no real há sempre uma rede de relações, cujas propriedades não são tão simples de detectar – e este convívio com a aparente desordem reina no caminhar do professor também – uma vez que ele delineará os caminhos a seguir em parceria com os alunos, ele não tem o percurso inteiramente estabelecido. É um reino de incertezas, de possibilidades, de buscas...que auxiliam a instaurar nas salas de aula ambientes propícios para a criatividade, principalmente do aluno.

Morin (2000, p. 84-85) anuncia que a educação do futuro deve se voltar para as incertezas...as incertezas ligadas ao conhecimento, ao real..."[...] a realidade não é facilmente legível. As idéias e teorias não refletem, mas traduzem a realidade, que podem traduzir de maneira errônea". Acrescenta que se faz necessário compreender a incerteza do real, de modo que há ainda algo possível e não visível no real. Quanto ao conhecimento, ele é "[...] uma aventura incerta que comporta em si mesma, permanentemente, o risco de ilusão e de erro" (MORIN, 2000, p. 86).

Nas certezas doutrinárias, dogmáticas e intolerantes é que "se encontram as piores ilusões; ao contrário, a consciência do caráter incerto do ato cognitivo constitui a oportunidade de chegar ao conhecimento pertinente, o que pede exames, verificações e convergência dos indícios [...]" (MORIN, 2000, p. 86).

Ao se formular problemas há decisões, escolhas; mas há, também, aposta e nela reside a consciência do risco e da incerteza. O professor adentra em um universo de interações e elas podem contrariar a sua intenção inicial. Assim, às vezes, é necessário tentar corrigir, modificar ou mesmo abandonar a intenção inicial e recomeçar. Desta forma, a formulação de problemas poderá trazer para as aulas de matemática as diversas facetas da construção desse conhecimento, notadamente as suas relações com a realidade. Isto fortalecerá a concepção do aluno de que a matemática foi construída e elaborada pelo homem e pode auxiliá-lo a entender essa realidade. O valor cultural e social, sem dúvida, pode ser abordado implicitamente, uma vez que ele está atrelado a construção da linguagem matemática.

Mas, novamente, nos deparamos que, em grande parte, a possibilidade de tratar os valores de forma mais efetiva, está sempre vinculada ao contexto – tal como já nos referimos anteriormente, ou seja, a pergunta está vinculada ao entorno, ou seja, ao meio em que o aluno está interagindo ou também pode alcançar por meio de tecnologias, por exemplo.

Ainda, para Mendonça (1999, p. 24), para a operacionalização da formulação de problemas, o professor deve cuidar para: 1. auxiliar o aluno na compreensão do contexto; 2. assegurar o desencadeamento do processo e 3. rever a utilização de conhecimentos "prévios", pelos alunos. Para Mendonça (1999, p. 24),

> [...] a formulação de um problema frente a um objeto/evento/situação pressupõe alguma falta de compreensão, uma falta parcial de significado sobre tal situação, mas supõe também que alguma coisa já esteja compreendida e exista curiosidade sobre o assunto, pois, caso contrário, seria impossível despertar uma problematização, um processo quase sempre espontâneo, na direção da compreensão com significado.

Voltando ao problema que formulamos como exemplo, podemos prever que pode haver dificuldade na compreensão dos elementos solicitados – preço por m^2 do terreno, preço por m^2 da área construída -, no entanto, o professor pode elaborar algumas atividades iniciais que permitam o entendimento desses itens. Explicações sobre área construída podem ser elaboradas a partir de recortes de jornais e revistas, por exemplo. De fato, o aluno só poderá auxiliar no desencadear do processo se participar das discussões envolvendo o contexto. Quanto a assegurar o desencadeamento do processo, Mendonça (1999, p. 25-27) sugere os seguintes procedimentos: 1. flagrar situações do contexto escolar ou de um contexto mais amplo; 2.convocar os alunos para a escolha de "temas geradores"; 3. partir de um assunto(ou tema ou mesmo pergunta) previamente escolhido e 4. partir de um modelo matemático conhecido. Segundo Mendonça (1999, p. 25):

> [...] o professor/a deve estar atento, na sala de aula, para flagrar situações que começam a se revelar significativas para os alunos/as, ou seja, para perceber que certas relações e particularidades do mundo físico-social passam a prender a atenção dos alunos/as. A partir desta evidência, o professor/a deve procurar participar da conversa sobre a situação, provavelmente já iniciado pelos alunos/as, e aproveitá-la como o diálogo que pode encaminhar a formulação de problemas.

Neste caso, exige-se por parte do professor o gosto pela troca de idéias com os alunos e um olhar refinado para fazer uma leitura matematizada da situação que se apresenta e já prevendo as suas potencialidades. As situações que podem gerar perguntas interessantes também precisam abarcar alguns conhecimentos já trabalhados com os alunos e ainda avançar, possibilitar a construção de novos conceitos ou novos olhares para conceitos já trabalhados.

Trata-se, portanto, de uma metodologia que exige uma sintonia fina do professor com todas as especificidades do conhecimento matemático.

Nas explicações dadas para a convocação dos alunos, ou de modo mais ameno, a solicitação, de que os alunos escolham temas que sejam do interesse deles – entre um rol de temas apresentados – cabe ao professor informar seus alunos de que ele está, com isso, propondo uma nova maneira de ensinar.

> Nessa explanação, é importante o professor/a apresentar/discutir, com o grupo, algumas idéias de temas interessantes e informá-lo de que a exploração de um tema não é somente um meio de formular problemas matemáticos, mas também um procedimento para compreender mais criticamente a realidade estudada. (MENDONÇA,1999, p. 26).

Considerando a minha experiência, posso conjeturar que este procedimento seria adequado para iniciar este modo de trabalhar com problemas, construindo novos hábitos nos alunos e também nos professores, uma vez que refletir sobre situações que nos rodeiam, à luz de conhecimentos matemáticos, não é hábito instaurado nas salas de aula, de modo geral. Sobre a possibilidade de partir de um assunto previamente escolhido – o que se deu no exemplo do preço do imóvel – podemos acrescentar que:

> [...] essa proposta de encaminhamento de formulação de problemas não prioriza, como as outras, situações reais – considero aqui, também a possibilidade de problematizações sobre situações fictícias, uma simulação do real, um jogo – além disso, tal escolha pode estar mais voltada para conteúdos que o professor/a deseja ensinar (MENDONÇA 1999 p. 27).

Tal procedimento parece adequado ao professor que ao iniciar esta metodologia, se sentir inseguro, temeroso de não ensinar matemática ou não ensinar a matemática que consta no programa, mas que não pode ser menosprezada. Ela dá tempo para o professor refletir sobre os possíveis encaminhamentos que a situação pode tomar, enquanto cria atividades para o aluno se inteirar do contexto.

Quanto à possibilidade de se formular problemas a partir de um modelo matemático conhecido, Mendonça (1999, p. 27) explica que, neste caso, o diálogo deve estar centrado na análise de um problema já resolvido, ou seja, a partir de um modelo matemático, o professor apresenta e resolve problemas em outros contextos.

Dos três itens mencionados por Mendonça (1999, p. 24) para cooperar na operacionalização da formulação de problemas nas salas de aula, resta comentar o que ela indica como necessário, a saber: a revisão, por parte do professor, do entendimento da questão do pré-requisito, que devido à linearidade marcante na matemática, como já descrevemos anteriormente, pode dificultar o desencadear do processo de formulação de problemas.

No ensino fundamental, às vezes, resolvemos um problema sobre volume de um sólido, sem que o aluno saiba calcular volume de prismas e pirâmides, por exemplo, uma vez que podemos estar nos referindo somente à noção de volume e isto o aluno pode ter, mesmo antes de ter acesso à escola.

> Na verdade, como professores/as, precisamos construir um novo significado para pré-requisito, mormente quando estamos no campo de ação do ensino fundamental. Este novo olhar para o aluno/a, conhecendo especialmente como ele/ela conhece fatos matemáticos, se contrapõe aquele tradicionalmente empregado na educação convencional, como um embasamento de ordem lógica, indicado pelo matemático, um requisito do campo da matemática, necessário para o conhecimento do item a ser estudado. (MENDONÇA 1999, p. 29).

Este olhar diferenciado para a questão do pré-requisito leva o professor a valorizar os "modos de pensar" do aluno que podem ser construídos independente do conhecimento elaborado que ele adquire na escola. Por outro lado, se ele ainda não memorizou determinados algoritmos ele pode criar outros e que igualmente resolvem os seus problemas. A compreensão dos conceitos matemáticos, pelo aluno, se dá com níveis diferenciados de representação.

> A fim de atender às diferenças individuais, o professor deve não somente variar os processos de ensino, mas selecionar, organizar e apresentar a matéria de modo que todas as crianças com diferentes níveis de possibilidades possam descobrir significação e compreender o problema.(GROSSNICKLE, 1967, p.11)

À medida que o aluno caminha no entendimento, também os modos de sistematização deste se tornam mais complexos. Nem sempre, ao tratar de um conceito, o aluno o domina com o nível adequado de linguagem, para uma determinada série mas, a incorporação deste em um problema, o levará a aumentar o entendimento e modificar, portanto, os modos de representação de tal conceito. Pode-se desenvolver conceitos, num mesmo problema, com diversos modos de sistematização.

Concordamos que as sugestões poderão ser (re)avaliadas se os professores se mostrarem interessados em se envolver com formulação de problemas. As nossas experiências futuras poderão acrescentar novas informações às sugestões dadas por Mendonça (1999). Caberá ao professor verificar qual sugestão vem ao encontro dos seus anseios.

No entanto, para concluir as análises que empreendemos quanto a possibilidade de por meio de resolução de problemas e agora, formulação de problemas, contemplarmos os valores da matemática, propomos que sempre os problemas tornam isto possível, com maior ênfase em um ou outro, mas eles só são amplamente contemplados quando cuidamos de modo especial do contexto gerado a partir do texto do problema ou que, ao formular o problema, construímos em parceria com os alunos.

O contexto pode ser construído ao se aplicar matemática, ao formular problemas do dia a dia, ou ao resgatar as origens empíricas de um conceito matemático, ou ao construir modelos matemáticos para interpretar uma situação do real..., enfim a riqueza do contexto possibilita trazer à tona os valores da matemática.

No entanto, não podemos ser ingênuos a ponto de afirmar que só o contexto e o problema a ele relacionado dariam conta de exibir os valores utilitário, estético, formativo, social e cultural da matemática. De fato, as concepções do professor é que dão corpo..., consistência à metodologia.

A seguir as nossas considerações finais.

6-CONSIDERAÇÕES FINAIS

As leituras que empreendi sobre Resolução de Problemas, bem como as reflexões que elas desencadearam quando do confronto com minha prática nas salas de aula, nos diversos níveis de ensino, trouxeram várias contribuições para a minha vida profissional e também para a vida pessoal.

Uma delas é a de poder reafirmar que sempre tive boa vontade em tornar minhas aulas mais atrativas e interessantes, que almejava que os alunos se interessassem por matemática, assim como eu sempre me envolvia de maneira prazerosa com os assuntos matemáticos. Mas, constatei que só isso não era o suficiente. Nesses anos, estive um pouco distante de novas idéias sobre metodologias do ensino de matemática, isto porque, com certeza, a minha formação me fez acreditar que para ensinar matemática era suficiente ter um certo domínio sobre assuntos matemáticos e ter prazer em ensiná-la. Há necessidade de nos envolvermos com teorias sobre "como ensinar".

Cometi erros ao ousar aplicar a metodologia de resolução de problemas. Agora, com as leituras, esses erros vieram à tona. Elas possibilitaram que eu descobrisse tais erros. Um deles, por exemplo, é o de acreditar que o melhor programa de matemática deveria estar necessariamente atrelado às atividades do dia a dia, do aluno. Ao desenvolver tais problemas, na verdade, enfatizava o valor utilitário da matemática e treinava os alunos na resolução de alguns problemas.

Assim, aprendi muito sobre Resolução de Problemas e agora, com certeza, com maior embasamento teórico, poderei (re)pensar na e sobre a minha prática.

Quanto às diferentes abordagens que mencionamos nos capítulos anteriores – os passos propostos por Polya, a modelagem matemática e a formulação de problemas – concluímos que elas podem contribuir para trazer para as aulas de matemática, os diversos valores da matemática - utilitário, estético, formativo, social e cultural - no entanto, isto está muito mais atrelado às concepções do professor e ao contexto que ele e o problema constroem que, de fato, à própria metodologia.

O valor utilitário – o mais contemplado – está presente nos problemas do dia a dia que envolvem as operações fundamentais, juros, percentagem, conceitos geométricos (perímetro, área de regiões planas e volume de sólidos), bem como na modelagem matemática – por tratar de modelos matemáticos e enfatizar também a utilidade da matemática na construção de conhecimentos de outras áreas.

No problema aberto sobre o custo das moradias (Capítulo 5, p. 86-87) também se contempla o valor formativo, uma vez que se dá espaço para a elaboração do pensamento generalizante. Os valores sociais e culturais podem ser contemplados tanto em problemas que resgatam a origem de idéias matemáticas (Capítulo 4, p. 71) como em um problema aberto, como o do custo das moradias (Capítulo 5, p. 86-87) ou na modelagem matemática. O valor estético está presente, por exemplo, no problema sobre a quantidade de diagonais de um polígono convexo (Capítulo 4, p. 67) e no problema do custo das moradias (Capítulo 5, p. 86-87), pois este valor está atrelado aos processos de construção da própria matemática.

As concepções do professor – notadamente as de matemática e seu ensino – são importantes. O professor deve ter clareza sobre as diversas facetas da matemática, ou seja, ele deve saber das especificidades desse saber, no que se refere à história das idéias matemáticas, ao seu caráter de ser aplicável e de se manter distante também da realidade. Ele deve também rever suas concepções sobre a formação de um professor de matemática. Não podemos (re)dimensionar as nossas ações em aula sem buscar novas idéias. Não é só dentro da sala de aula e dialogando somente consigo que ele poderá se rever.

Quanto à minha vida profissional, a principal contribuição foi a de que – sempre é possível recomeçar – sem desconsiderar as experiências anteriores. Quanto à minha vida pessoal, a principal contribuição foi a de manter o espírito investigativo: – o de perguntar e de questionar; poder mostrar novos caminhos; tornar nossa vida mais interessante e dinâmica.

Concluo este trabalho com a certeza de que construí novos olhares para a metodologia de resolução de problemas. Os valores da matemática podem ser contemplados nas aulas e esta possibilidade existe pelo contexto que podemos construir por meio da expansão do texto do problema ou mesmo ao se formular um problema, ou seja, ao se apresentar um problema aberto, sem dados e aparentemente sem as características do que se convenciona denominar problema matemático. Os fins pedagógicos que orientam a seleção e a elaboração de problemas se tornaram mais evidentes à luz desses novos olhares. Por outro lado, tais olhares também permitem avaliar que as metodologias de resolução de problemas – as que mencionamos - podem não trazer contribuições significativas para a aprendizagem de matemática, a ponto de modificar a situação pouco satisfatória sobre o desempenho dos alunos do ensino fundamental e médio apresentada no capítulo 3 (p. 56-57), uma vez que isto não depende somente da vontade de ensinar do professor. No entanto, com problemas e com o contexto que eles geram ou têm o potencial para gerar e isto é desenvolvido pelo professor, são criadas situações propícias para suscitar a aprendizagem. Sim, pois deste modo, as diversas facetas do conhecimento matemático estão presentes nas aulas e também se propicia a instauração de uma movimentação diferenciada nas aulas – onde os alunos participam com suas idéias matemáticas, com suas experiências de vida, com suas reflexões - o que pode despertar no aluno o interesse por esse conhecimento ou uma certa curiosidade que o impele a se interessar e, então, com esse envolvimento...o processo de ensino/aprendizagem pode se iniciar e se realizar... A experiência futura ajudará a validar ou não esta nossa conjetura, isto porque, para Maturana (2001, p. 267):

> O conhecimento do conhecimento obriga. Obriga-nos a assumir uma atitude de permanente vigília contra a tentação da certeza, a reconhecer que nossas certezas não são provas de verdade, como se o mundo que cada um vê fosse **o mundo** e não **um mundo** que construímos juntamente com os outros. Ele nos obriga, porque ao saber que sabemos não podemos negar que sabemos.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, Rodney C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática:** uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BOYER, C. Benjamin. **História da matemática.** São Paulo: Universidade de São Paulo, 1999.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias - Ensino Médio. Brasília: MEC/SEMT,1999.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática 5ª a 8ª série. Brasília: MEC/ SEF,1998.

COLL,César et al. **O construtivismo na sala de aula.** 6 ed. São Paulo: Ática, 1999.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação:** reflexões sobre educação e matemática. São Paulo: Summus, 1986.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática:** arte ou técnica de explicar e conhecer. 2 ed. São Paulo: Ática 1993.

DANTE, L. R. **Didática de Resolução de problemas de matemática**. 12 ed. São Paulo: Ática, 2000.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben, **A experiência matemática.** 6 ed. Lisboa: Gradiva,1995. (Coleção Ciência Aberta)

DRUCK, Suely. O drama do ensino de matemática**. Folha de São Paulo**, São Paulo, 25 mar. 2003. Caderno Sinapse, p.32.

FERNANDES, Francisco C. Aprendizado de matemática segue crítico Artigo, **Folha de São Paulo,** São Paulo**,** 17 jun. 2004. p. C3.

FIORENTINI, D., **Rumos da pesquisa brasileira em educação matemático:** o caso da produção científica em cursos de pós-graduação. 1994. Tese (Doutorado), Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. SP, 1994.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia-saberes necessários à prática educativa**, 21ed. São Paulo: Paz e Terra, 2002.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2002.

GARBI, Gilberto G. **O romance das equações algébricas.** São Paulo: Makron Books, 1997.

GROSSNICKLE, Foster; BRUECKNER J. Leo. **O ensino da aritmética pela compreensão.** Rio de Janeiro: Fundo de Cultura, 1967. (Coleção Estante de Pedagogia; v.1).

LOURENÇO FILHO, M.B. **Introdução ao estudo da escola nova**: bases, sistemas e diretrizes da pedagogia contemporânea. 12 ed. Rio de Janeiro: Fundação nacional de Material Escolar, 1978.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Realidade.** 5 ed. São Paulo: Cortez, 2001.

MATURANA, H. R. e VARELA, F. J. **A árvore do conhecimento:** as bases da compreensão humana; tradução: Humberto Mariotti e Lia Diskin. São Paulo: Palas Athena, 2001.

MENDONÇA, Maria do Carmo. Resolução de problemas pede (re)formulação. In: ABRANTES et al. (Orgs.). **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: APM, 1999. p.15-33.

MOLES, Abraham A. **A criação científica.** São Paulo: Perspectiva, 1971.

MORIN, Edgar. **O Método 4. As idéias.** Porto Alegre: Sulina, 1998

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-aprendizagem da matemática através da recolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida V. et al. **Pesquisa em educação matemática:** concepções & perspectivas. São Paulo: Ed. Unesp, 1999. (Seminários & Debates). p. 199-218.

OSTROWER, Fayga. **A sensibilidade do intelecto.** Rio de Janeiro: Campus, 1998.

PERRENOUD, Philippe, **Dez novas competências para ensinar.** Porto Alegre: Artmed, 2000.

PESSOA, Fernando. **Obra poética**, Rio de Janeiro: Nova Aguilar, 1995.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas,** Rio de Janeiro: Interciência,1978.

POZO, J. I.. **A solução de problemas**: aprender a aprender, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

SANTALÓ, Luiz A. Capítulo 1. In: HOIZ, Victor Garcia. **Enseñanza de la matemáticas en la educación intermed.** Madrid: Rialp, 1994.

SCHAPIRO, Meyer. **Mondrian :** a dimensão humana da pintura abstrata. São Paulo: Cosac & Naify, 2001.

SHOENFELD, Alan. Porquê toda essa agitação acerca da resolução de problemas?. In: ABRANTES et al. (Orgs.) **Investigar para aprender matemática.** Lisboa: APM, 1996, p. 61-71.

VALÉRY, Paul, **Introdução ao método de Leonardo da Vinci (1894)** / São Paulo: Ed. bilíngüe francês/português, Ed. 34, 1998.

ANEXO A - Resolução de Problemas, segundo Polya

Resolução de Problemas com Derivadas e Integrais
- uma tentativa de utilizar os passos propostos por Polya-

Admitimos que o aluno já estudou funções, via resolução de problemas, as regras de diferenciação e máximos e mínimos. Os problemas apresentados podem ser classificados como rotineiros. Eles recebem um tratamento diferenciado - utilizamos os passos propostos por Polya para resolvê-los.

Problema 1

Uma empresa revende combustível do tipo bio-diesel, acondicionados em tambores, com preço de revenda igual a R$ 1,20 o litro, comprando o combustível por R$ 0,40 litro. Para diminuir os custos, ela fabrica tambores cilíndricos com tampa, cuja altura é igual ao diâmetro da base, com o custo total de fabricação consistindo em: chapas de ferro a R$ 20,00 o metro quadrado, mais o custo de soldagem da base circular do tambor e da superfície lateral cilíndrica a R$ 0,90 o metro e mais um custo fixo de R$ 800,00 por dia, para pagar mão de obra e outros encargos, de uma produção de 100 tambores/dia. $\text{Dado}: \pi = 3{,}14$.

a) Determine o custo total diário, em função do raio da base do tambor, para produzir 100 tambores de bio-diesel.
b) Determine o lucro total diário da empresa, em função do raio da base, na revenda de 100 tambores de bio-diesel.
c) Sabendo que a norma brasileira(ABNT), estabelece que o diâmetro da base do tambor não deve ser menor que 50cm e não deve exceder 80 cm, determine o raio da base que fará a empresa ter lucro máximo diário na produção de 100 tambores.
d) Calcule o lucro máximo diário.

1º passo :Compreensão do problema

Conforme a proposta de Polya, após cada indagação o professor tem papel fundamental, despertando a curiosidade do aluno, facilitando-lhe a compreensão, porém sem dar a resposta pronta. (a linha pontilhada representa o tempo de reflexão e compreensão para dar resposta à indagação)

•Quais são os dados do problema?

- ....

- O preço de revenda, os preços dos custos, o cilindro , a produção diária.

- ....

•Qual é a variável ou a incógnita?

- ....

- o raio da base do cilindro, que vamos chamar de r

- a altura do cilindro, que é igual a 2r

• Quais são as condicionantes?

- ....

• Como iremos fazer a composição do custo total, se não sabemos a quantidade de óleo, a quantidade de chapas para fabricar um tambor e a quantidade de solda utilizada?

- ....

• Como iremos calcular o lucro total ?

• Vocês se lembram de algum problema que relaciona receita, custo e lucro?

- ....

- Sim, $L(x) = R(x) - C(x)$.

- Para que vocês compreendam melhor o problema experimentem planificar o cilindro:

- ....

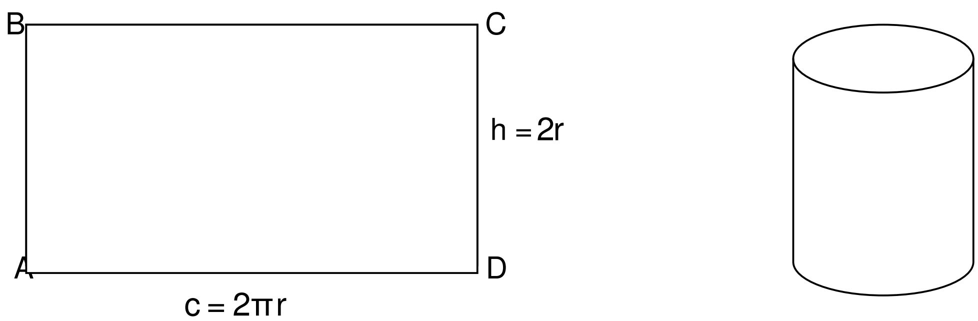

fig.12

- É claro que se esse retângulo ABCD, constituído de uma chapa de ferro enrolada vai se transformar numa superfície cilíndrica, o comprimento do retângulo vai coincidir com o comprimento do círculo máximo periférico da tampa ou da base do tambor.

- ....

- Ou isso não é verdade? Se alguém não entendeu destaque uma folha de papel e junte suas bordas laterais.

- Como o problema tem diversas unidades de medida, vocês não acham que deveríamos adotar só uma delas, para não cometer erros.?

    - Qual delas deve ser adotada o metro, o centímetro ou o decímetro?

- ....

    - Que tal o decímetro? Por que o decímetro seria conveniente?

- ....

    - É conveniente, porque todos sabem que 1 decímetro cúbico é igual a 1 litro, facilitando o cálculo do volume de bio-diesel.

Estabelecimento de um plano

Vamos discriminar as etapas:

1ª.) Cálculo de C1: para compor o custo total vamos começar pela dimensão linear, isto é pelo custo da solda, que será feita no comprimento do retângulo, para formar a base circular e mais a largura igual a 2r, para fixar a superfície cilíndrica. Daí ,é só multiplicar pelo custo unitário e por 100 unidades de tambor.

2ª.) Cálculo de C2: em seguida vamos calcular o custo da área de chapa de aço, que é a área do retângulo mais as áreas de dois círculos que formam a base e a tampa do tambor. Daí, é só multiplicar pelo custo unitário e por 100 tambores.

3ª.) Cálculo de C3: se a empresa vende 100 tambores de óleo por dia, precisamos saber qual é a quantidade de óleo de cada tambor, isto é qual é o volume de cada tambor, para saber seu custo, sua receita e seu lucro. O volume é igual à área da base circular multiplicada pela altura. Daí, basta multiplicar pelo custo unitário e por 100 tambores.

4ª.) O custo total diário é igual à $: C_T = C_1 + C_2 + C_3 + C_F$, onde C_F é o custo fixo.

5ª.) Cálculo da receita total diária e do lucro total diário: R_T e L_T .

6ª.) Cálculo do raio da base do tambor que resulta no lucro máximo.

Execução do plano

1ª.) etapa: calcular o custo C_1

Revendo a figura 1, podemos perceber que o comprimento de solda é igual à soma do comprimento do círculo que forma a base a ser soldada na superfície cilíndrica mais a medida da altura do cilindro.

Assim , teremos : $2\pi r + 2r$.

Logo, o custo da soldagem de 100 tambores será de:

$$C_1 = (2\pi r + 2r)\frac{0{,}90}{10} \times 100 = (6{,}28r + 2r) \times 9 = 74{,}52r$$

2ª.) etapa: calcular o custo C_2

Utilizando a mesma figura, as áreas da chapa de aço, para construir um tambor será de: $(2\pi r)(2r) + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$.

Logo, o custo das chapas de ferro, para 100 tambores, será de:

$C_2 = 6\pi r^2 \times \frac{20{,}00}{100} \times 100 = 376{,}80r^2$, lembre-se que: $1m^2 = 100dm^2$.

3ª.) etapa: calcular o custo C_3

O volume de um cilindro é igual a área do circulo da base multiplicada pela altura: $(\pi r^2) \times 2r = 2\pi r^3$.

Logo, o custo de 100 tambores de óleo bio-diesel será de:

$$C_3 = 2\pi r^3 \times 0{,}40 \times 100 = 251{,}20\,r^3 \ .$$

4ª.) etapa: compor o custo total, somando os custos obtidos nas etapas anteriores:

$$C_T = C_3 + C_2 + C_1 + C_F$$

$$C_T = 251{,}20r^3 + 376{,}80r^2 + 74.52r + 800$$

5ª.) etapa: calcular a receita total diária e o lucro total diário:

$$R_T = 2\pi r^3 \times 1{,}20 \times 100 = 753{,}60\, r^3$$
$$L_T = R_T - C_T$$
$$L_T = 753{,}60r^3 - (251{,}20r^3 + 376{,}80r^2 + 74{,}52r + 800)$$
$$L_T = 502{,}40r^3 - 376{,}80r^2 - 74{,}52r - 800$$

6ª.) etapa: calcular o raio que otimizará a receita para maior possível:

Sabemos, de problemas correlatos anteriores, que os pontos de máximos e mínimos localizados, ocorrem para derivadas nulas nesses pontos. Derivando a função lucro teremos:

$$\frac{dL_T}{dr} = 1507{,}20\, r^2 - 753{,}60r - 74{,}52 = 0$$

Notem que os coeficientes da equação do 2º grau, são divisíveis por 12,

$$(\div 12)\quad 125{,}60r^2 - 62{,}80r - 6{,}21 = 0$$

Aplicando a fórmula de Báskara, teremos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 62{,}80^2 - 4 \times 125{,}60 \times (-6{,}21)$$
$$\Delta = 3943{,}84 + 3119{,}90 = 7043{,}74$$
$$r = \frac{62{,}80 \pm \sqrt{7063{,}74}}{2 \times 125{,}60} = \frac{62{,}80 \pm 84{,}05}{251{,}20}, \text{ onde } r_1 = 0{,}58 \text{ e } r_2 = -0{,}08$$

Calculando a derivada segunda, teremos :

$\frac{dL^2{}_T}{dr} = 251{,}20r - 62{,}80$, a qual para $r = 0{,}58$, teremos :

$251{,}20 \times 0{,}58 - 62{,}80 = 82{,}90 > 0 \Rightarrow$ 0,58 é um ponto de mínimo.

Por isso a partir de $r > 0{,}58$, a função lucro será sempre crescente, portanto usaremos $r = 4dm$, que é o limite superior permitido pela norma.

Vamos calcular então, o lucro para $r = 4dm$.:

$L_T = 502{,}40r^3 - 376{,}80r^2 - 74{,}52r - 800$

$L_T(4) = 502{,}40 \times 4^3 - 376{,}80 \times 4^2 - 74{,}52 \times 4 - 800$

O lucro máximo diário será então de :

$32153{,}60 - 6028{,}80 - 298{,}08 - 800 =$ R\$ 25.026,72

Retrospecto

1º)analisando o problema

Se dividirmos o lucro total líquido por 100, obteremos o lucro líquido de cada tambor : R\$25.026,72 $\div 100 =$ R\$250,27/tambor. Como o volume de cada tambor é igual a $2\pi r^3 = 6{,}28 \times 4^3 = 401{,}92$ litros, o lucro por litro de biodiesel é : $250{,}27 \div 401{,}92 =$ R\$0,62.Como o litro de óleo é comprado por R\$ 0,40 e vendido R\$1,20 a diferença : $0{,}80 - 0{,}62 = 0{,}18$ reais/litro é utilizada para pagar os custos de fabricação de cada tambor. Isto significa que, do preço de venda de cada tambor: R\$ $0{,}80 \times 401{,}92 =$ R\$321,54 , teremos que descontar : $0{,}18 \times 401{,}92 =$ R\$ 72,35, para pagar outros custos, sobrando um lucro líquido de R\$ 250,27/tambor de biodiesel..

2º) propondo outro problema correlato

Fazendo um retrospecto do problema, poderíamos estabelecer que o raio da base do cilindro tenha medida tal, para que seja um ponto de máximo localizado, acarretando num lucro máximo para empresa, no dimensionamento do volume do cilindro. Para tanto, vamos partir da equação do 2º grau, na forma SP, isto é soma e produto:

$x^2 - Sx + P = 0$, com raízes $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x^2 - x + 0 = 0$.

Para facilitar fizemos $x_1 = 0$, porque é ponto de mínimo e não será objeto de nosso problema, porém sendo igual a zero facilitará os cálculos.

Como o zero será ponto de mínimo e $x = \frac{1}{3}$ ponto de máximo,

a função do 2º grau que resultará numa função do 3º grau, após integração,

é igual a $f(x) = -3x^2 + x = 0 \Rightarrow \int f(x)dx = \int(-3x^2 + x)dx = -x^3 + \frac{x^2}{2} - C$.

É evidente que após algumas experimentações numéricas o problemas terá seus dados adaptados para chegar nesse resultado, como solução do problema, que terá o seguinte enunciado:

Problema 2

Uma empresa fabrica latas cilíndricas de óleo de oliva importado, envazando o óleo em cada lata. As latas são fabricadas com folhas de "flandes", metálicas especiais. A receita da empresa é calculado por um parâmetro de R$ 8,00 por metro quadrado de folha transformada em lata. O custo total da empresa consiste em R$ 0,40 por litro de óleo envazado mais o custo fixo de R$ 1,50 para a produção de 100 latas/hora. Sabendo que a altura da lata é igual ao dobro do diâmetro da base da lata cilíndrica, determine as dimensões da lata para que o lucro da empresa, na produção de 100 latas/hora envazadas, seja máximo. Dado: $\pi = 3{,}14$.

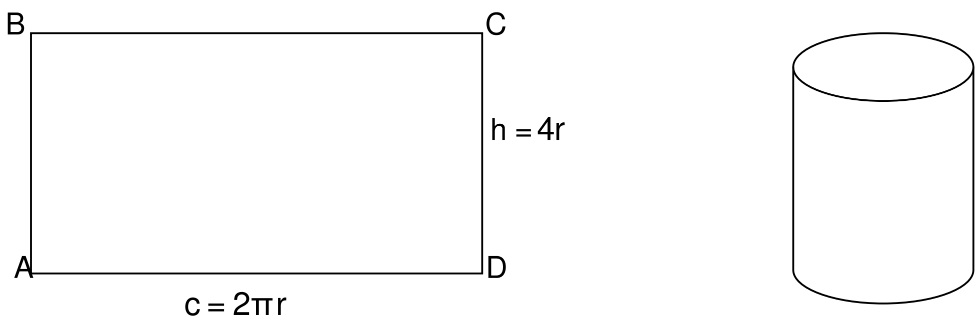

fig.13

1ª.) etapa: cálculo do volume da lata e do custo total para a fabricação de 100 latas/hora, envazadas:

$$V = \pi r^2 \times 4r$$
$$C = 4\pi r^3 \times 0{,}40 \times 100 = 502{,}40r^3$$

2ª.) etapa: cálculo da receita total para a fabricação de 100 latas/hora.

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \times 4r = 10\pi r^2$$
$$R = 10\pi r^2 \times \frac{8}{100} \times 100 = 251{,}20r^2$$

3ª.) etapa: Cálculo do lucro da empresa para fabricar 100 latas/hora, envazadas:

$$L = R - C$$
$$L = 251{,}20r^2 - 502{,}40r^3 - 1{,}50$$
$$L = -502{,}40r^3 + 251{,}20r^2 - 1{,}50$$

4ª.) etapa: Cálculo da derivada da função lucro, em relação à variável r a qual deve ser igualada a zero, para determinarmos o seu ponto de máximo:

$$\frac{dL}{dr} = -1507{,}20r^2 + 502{,}40r = 0 \Rightarrow -3r^2 + r = 0 \Rightarrow r \times (-3r + 1) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r = 0 \text{ ou } r = \frac{1}{3} \approx 0{,}33\,dm = 3{,}3cm.$$

5ª.) etapa : Verificação através da derivada segunda:

$$\frac{d^2L}{dr} = -3014{,}40r + 502{,}40 \Rightarrow \frac{d^2L}{dr}(\frac{1}{3}) = -3014{,}40 \times \frac{1}{3} + 502{,}40 =$$
$$-1004{,}80 + 502{,}40 = -502{,}40 < 0 \Rightarrow \frac{1}{3} \text{ é ponto de máximo.}$$

6ª.) etapa: cálculo do diâmetro , altura e volume da lata:

$$d = 2 \times 3{,}3cm = 6{,}6cm$$
$$h = 4 \times 3{,}3cm = 13{,}2cm$$
$$V = 4 \times 3{,}14 \times (0{,}33)^3\,dm^3 = 0{,}45dm^3 = 0{,}45\text{ litro}$$

7ª.) Cálculo do lucro máximo na fabricação e envazamento de 100 latas/hora.

$$L_{max} = 251{,}20 \times 0{,}33^2 - 502{,}40 \times 0{,}33^3 - 1{,}50, = 27{,}36 - 19{,}55 =$$
$$L_{max} = 7{,}81 \text{ reais/hora.}$$

Problema 3

Carlos pretende vender seu terreno por R$ 50.000,00 a vista . Entretanto, em face das dificuldades de venda a vista, está disposto a fazer o seguinte plano de pagamento:

- entrada de R$ 10.000,00.
- mais R$ 10.000,00, após 3 meses e
- mais duas parcelas , sendo que a segunda deverá ter um valor 25% superior que o valor da primeira, vencíveis em 4 meses e 6 meses, respectivamente,após a entrada.

Admitindo-se que a taxa de juros compostos do financiamento é de 4% ao mês, calcule o valores nominais das duplicatas correspondentes às terceira e quarta parcelas.

Compreensão do Problema

Deveremos ler atentamente para compreender as condições do financiamento, descobrir quais as condicionantes que relacionam os dados do problema com suas variáveis. Para facilitar a compreensão é de muito bom senso fazer um diagrama de fluxo de caixa:

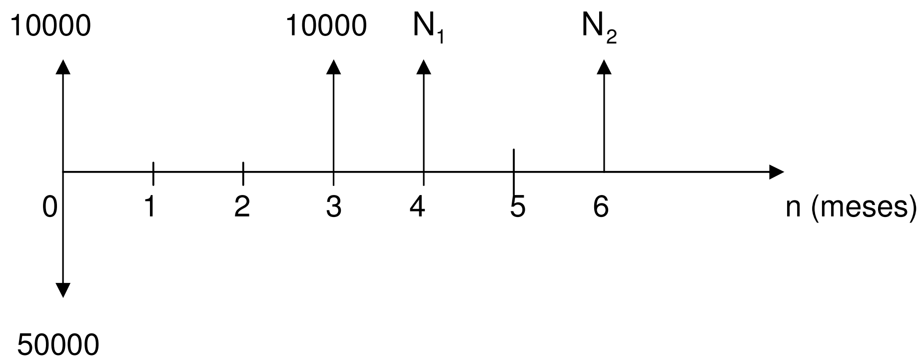

fig.14

- Qual o valor que, efetivamente, vai ser financiado?
- Veja o que está ocorrendo hoje, o comprador não vai pagar a vista, porém está dando uma entrada.
- Parece claro que o valor da entrada deve ser descontado do valor a vista.
- E o terceiro pagamento, também poderá ser descontado do valor a vista?
- Sim, desde que seu valor seja atualizado no tempo, isto é , seja calculado seu valor presente, na data de hoje.
- Quais são as variáveis ou incógnitas do problema?
- N_1 e N_2 .
- Quantas equações serão necessárias para resolver o problema?
- Notem que as variáveis possuem uma condicionante, que já é uma das equações.
- E a outra equação?
- O valor financiado, os prazos de pagamento, incluindo as incógnitas, a taxa do financiamento e os pagamentos calculados na data zero, deverão ter uma condicionante da matemática financeira, para que haja uma equivalência dos valores.

Estabelecimento de um plano

- Cálculo do valor financiado, a ser pago em 3 pagamentos, 3, 4 e 6 meses, respectivamente: V_F
- Cálculo do valor atual do segundo pagamento. A_1
- Cálculo do saldo devedor após o segundo pagamento, considerando a data zero: S_D
- Descrição da 1ª. condicionante entre N_1 e N_2.
- Descrição da segunda condicionante entre: S_D , N_1 e N_2.
- Resolução das equações, podendo ser usada uma calculadora científica ou financeira, para se encontrar às soluções.

Execução do plano

- Cálculo do valor financiado :

$V_F = V_V - E$, onde V_V é o valor a vista e E é o valor da entrada.

$V_F = 50.000{,}00 - 10.000{,}00 = 40.000{,}00$ reais

- Cálculo do valor atual do segundo pagamento :

$$A_1 = \frac{N_1}{(1+i)^{n_2}} \text{ , onde } N_1 = 10.000{,}00,\ i = 4\% \text{ e } n_2 = 3$$

$$A_1 = \frac{10.000}{(1+0{,}04)^3} = 8.889{,}96 \text{ reais.}$$

- Cálculo do saldo devedor, após o segundo pagamento : S_D

$S_D = 40.000{,}00 - 8.889{,}96 = 31.110{,}04$ reais.

- Descrição da 1ª condicionante entre N_1 e N_2 :

$N_2 = N_1 + 25\%$ do valor de $N_1 \Rightarrow N_2 = N_1 + 0{,}25N_1 = 1{,}25N_1$.

- Descrição da segunda condicionante entre S_D , N_1 e N_2 :

$$S_D = \frac{N_1}{(1+i)^{n_3}} + \frac{N_2}{(1+i)^{n_4}}, \text{ onde } N_1\ N_2 \text{ são os valores nominais procurados ,}$$

$n_3 = 4$ meses e $n_4 = 6$ meses

Para facilitar, vamos fazer um fluxo de caixa da situação atual:

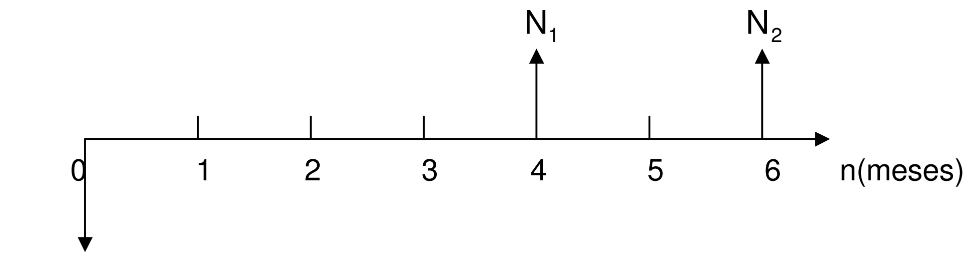

fig.15

$$S_D = \frac{N_1}{(1+0,04)^4} + \frac{N_2}{(1+0,04)^6}$$

$$31.110,04 = \frac{N_1}{(1+0,04)^4} + \frac{1,25N_2}{(1+0,04)^6}$$

$$31.110,04 = \frac{N_1}{1,169859} + \frac{1,25N_1}{1,265319} \text{ (aperte a tecla } \frac{1}{x}\text{, da calculadora)}$$

$$31.110,04 = 0,854804N_1 + 0,987894N_1$$

$$31.110,04 = 1,842698N_1 \Rightarrow N_1 = \frac{31.110,04}{1.8426,98} = 16.882,88 \text{ reais.}$$

$$\text{e como } N_2 = 1,25N_1 \text{, teremos } N_2 = 16.882,88 \times 1,25 = 21.103,60 \text{ reais.}$$

Retrospecto

O valor total pago pelo comprador será de:

10.000 + 10.000 + 16.882,88 + 21.103,60 = 57.986,48 reais.

Como o valor a vista do terreno é de R$ 50.000,00, então os juros pagos pelo comprador ao comprar a prazo é igual a:

57.986,48 - 50.000,00 = 7.986,64 reais.

-A taxa total de juros no período de 6 meses é expressa por:

$$in = \frac{M}{C} - 1 = \frac{47.986,48}{40.000,00} - 1 \approx 0,1997 \approx 20\%$$

A taxa mensal efetivamente paga pelo comprador será de :

$$i6 = \frac{0,1997}{6} \approx 0,0333 = 3,33\% \text{ ao mês.}$$

O problema pode ser generalizado para outras situações de financiamento, usando sempre a equivalência de capitais, que relaciona os valores nominais dos títulos a serem pagos em data futura (FV, na calculadora financeira), que para serem comparados com os pagamentos efetuados devem ter seus valores atualizados(PV, na calculadora financeira) na data de hoje.

Se V_V é o valor a vista de um certo bem ,
E é o valor da entrada paga pelo comprador ,
V_F é o valor financiado pelo credor ,
S_D é o valor do saldo devedor após o pagamento da entrada ,
$N_1, , N_2, N_3, \ldots\ldots, N_n$ são os valores no min ais dos títulos correspond entes ao saldo devedor que deverão ser liquidados nas datas ; 1, 2, 3, 4, ..., n.
Então , teremos a equivalênc ia :

$$S_D = V_V - E = \frac{N_1}{(1+i)^1} + \frac{N_2}{(1+i)^2} + \frac{N_3}{(1+i)^3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{N_n}{(1+i)^n}$$

Com o seguinte fluxo de caixa:

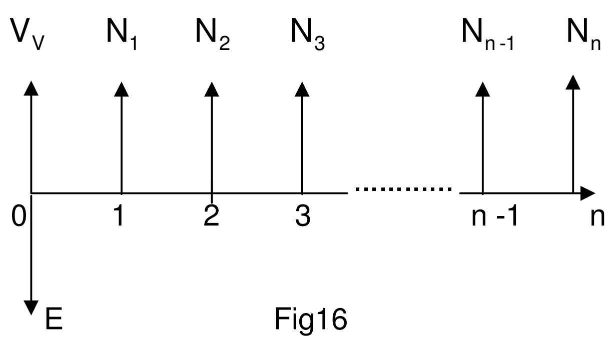

Fig16

Se $N_1 = N_2 = N_3 = ... = N_n = N$, teremos :

$$S_D = N \times [\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + ... + \frac{1}{(1+i)^n}] \quad (1)$$

Multiplicando, ambos os membros por $\frac{1}{(1+i)}$,

$$\frac{1}{(1+i)} S_D = N \times [\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + ... + \frac{1}{(1+i)^n}] \quad (2)$$

Subtraindo as equivalências (1) e (2), e reduzindo os denominadores ao mínimo múltiplo comum teremos :

$$S_D - \frac{1}{(1+i)} S_D = N \times [\frac{1}{(1+i)} - \frac{1}{(1+i)^{n+1}}] =$$

$$\frac{(1+i)S_D - S_D}{(1+i)} = N \times [\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n+1}}] \Rightarrow \quad S_D = N \times [\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}]$$

Como exemplo vamos resolver o seguinte problema:

Problema 4

Um administrador deseja comprar um computador, cujo preço a vista é de R$3.500,00. Todavia, a venda do equipamento pode ser financiada da seguinte forma: R$ 500,00 de entrada mais 6 prestações mensais e iguais, vencendo a primeira um mês após a compra. Calcule o valor de cada prestação, sabendo que a loja usa a taxa de juros compostos de 5% ao mês.

-Para facilitar a compreensão do problema, teremos o seguinte fluxo de caixa:

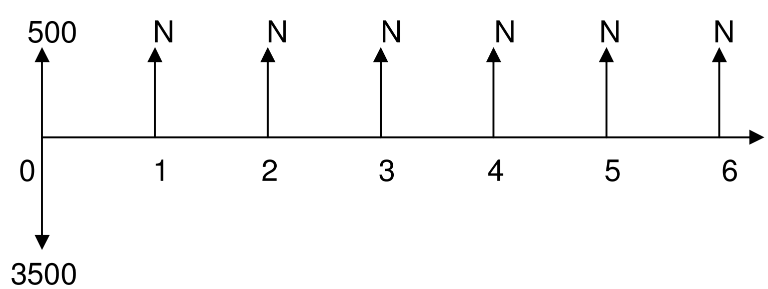

fig17

O valor de cada prestação N, é o valor nominal de cada "boleto", emitido pela loja, para pagamento mensal pelo devedor.(PMT, na calculadora financeira).

Como o cliente está dando uma entrada então o saldo devedor financiado é igual a: R$ 3.500,00 - R$ 500,00 = R$ 3.000,00.

Substituindo os dados do problema na condicionante obtida, teremos:

$$3000 = N \times [\frac{(1 + 0,05)^6 - 1}{0,05 \times (1 + 0,05)^6}] \text{ que resulta em:}$$

$$3000 = N \times [\frac{0,3401}{0,0670}] \Rightarrow \quad 3000 = N \times 5,0761 \Rightarrow \quad N = 591,00$$

Por tan to, o admistrador pagará uma entrada de R$ 500,00 mais 6 prestações mensais e con sec utivas de R$ 591,00.

Total: $500 + 6 \times 591,00 = R\$4.046,00$

-Se o valor da entrada for igual ao valor da prestação:

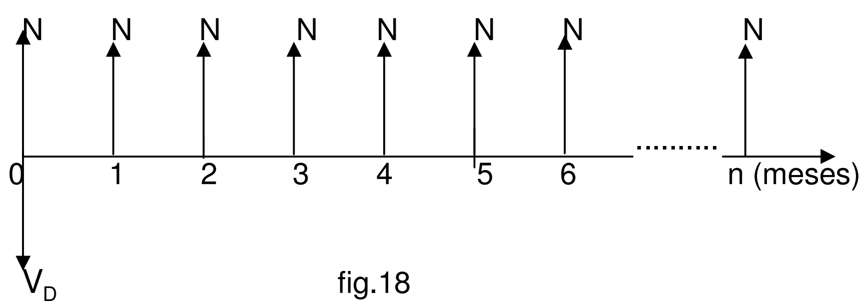

fig.18

Então ficaremos com a seguinte fórmula:

$$V_v = N + N \times [\frac{(1 + i)^{n-1} - 1}{i(1+i)^{n-1}}]$$

Obs.:Na programação da calculadora financeira basta apertar a tecla "begin".

Para ilustrar melhor, vamos encerrar com mais um exemplo:

Problema 5

Um eletrodoméstico é vendido a prazo, em 4 pagamentos iguais e mensais de R$ 55,00, sendo o primeiro dado como entrada no ato da compra. Se a loja opera a uma taxa de juros compostos de 4.5% ao mês, qual o preço a vista?

-Para compreender deveremos fazer sempre o diagrama do fluxo de caixa:

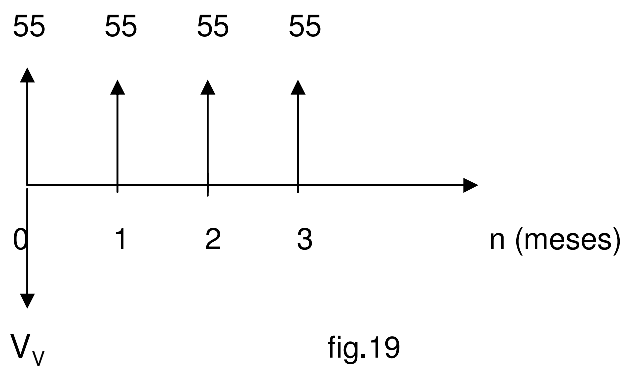

fig.19

Substituindo os dados do problema na fórmula acima, teremos:

$$V_V = 55 + 55 \times \left[\frac{(1+0{,}045)^{4-1} - 1}{0{,}045 \times (1+0{,}045)^{4-1}}\right]$$

$$V_V \approx 55 + 55 \times \frac{0{,}1412}{0{,}0514} \approx 55 + 151{,}09 = 206{,}09$$

Portanto, o valor a vista do eletrodoméstico é de R$206,09. Se o comprador preferir pagar a prazo, desembolsará a quantia de R$220,00 em 4 prestações de R$55,00, sendo a primeira dada como entrada.