



## INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE FUNÇÃO: UMA DISCUSSÃO A PARTIR DE UMA PROPOSTA COM O SOFTWARE SIMCALC NO ENSINO FUNDAMENTAL

### RESUMO

Nesta pesquisa, temos como objetivo analisar quais as potencialidades do software SimCalc na construção do pensamento funcional, tendo como base teórica os Obstáculos Epistemológicos para o ensino de função de Sierpinska e os Coletivos Pensantes seres-humanos-com-mídias de Borba. Este trabalho é um recorte de uma pesquisa de doutoramento em Educação Matemática, no qual exploraremos a análise de um estudo piloto aplicado a um aluno do 9º ano do Ensino Fundamental. A análise dos dados considera a identificação de obstáculos epistemológicos e a influência do SimCalc nas respostas apresentadas e o potencial do software para superá-los.

**Palavras-chave:** Função; SimCalc; Obstáculos epistemológicos.

### 1. Introdução

Atualmente, o conceito de função ocupa um lugar de destaque na Matemática escolar devido a sua vasta aplicabilidade, seja nas conexões internas à própria Matemática, com outras áreas do conhecimento, ou na resolução de problemas do dia a dia. No entanto, segundo Sierpinska (1992), ainda são muitas as dificuldades relacionadas ao ensino desse conceito. A autora ressalta que isto não é algo novo, desde a década de 1980, estudos destacam tais dificuldades. Também pesquisas recentes, como, por exemplo, Benedetti (2003) e Scano (2009), apontam ainda problemas na aprendizagem desse conceito por alunos de Ensino Médio e Ensino Superior.

Isso nos leva a refletir sobre as formas de se lidar com essas dificuldades em sala de aula. Atualmente, dentre as várias ferramentas disponíveis para o auxílio no desenvolvimento de tal conceito, o uso da tecnologia ocupa um lugar de destaque. Borba (2002) enfatiza que, dentre as várias discussões feitas na Psicologia e em particular na Psicologia da Educação Matemática, uma se refere a pensar se o ser humano isolado se constitui em sujeito epistêmico ou se a unidade básica de produção de conhecimento seria o ser social, composto por mais de uma pessoa.



Em meio a esse cenário, Borba (2002) integra a tecnologia, e apresenta uma visão, que, na realidade, nos remete à ideia de coletivos pensantes.

É neste contexto que temos como objetivo discutir quais são as potencialidades do software SimCalc enquanto integrante de um coletivo pensante (alunos, atividades e recurso computacional) na superação de Obstáculos Epistemológicos discutidos por Sierpinska (1992) ao introduzir ideias relacionadas ao conceito de Função no 8º ano do Ensino Fundamental.

Frente a este objetivo, surgem as seguintes questões de pesquisa: *Ao se introduzir o conceito de função por meio do software SimCalc no 8º ano do Ensino Fundamental, quais obstáculos são observados? Esses obstáculos são os mesmos relatados por Sierpinska? Novos obstáculos surgem? Quais são as potencialidades do software para encará-los?*

Na busca de responder a tais questionamentos, foi elaborada, inicialmente, uma sequência de atividades (estudo piloto) com objetivo de perceber as potencialidades do software e fazer ajustes necessários para o estudo principal.

A aplicação deste estudo piloto foi realizada com um aluno do 9º ano que ainda não havia abordado o tema funções, tendo em vista que pretendemos, no estudo principal, trabalhar com alunos do 8º ano, que ainda não foram introduzidos ao conceito de função. Esta escolha se dá por entendermos que, com tal público, poderemos perceber se obstáculos se manifestam ao explorar a introdução desse conceito.

## **2. Obstáculos Epistemológicos**

Para Sierpinska (1992) já é consenso entre muitos educadores que compreender um conceito matemático está muito além de simples leitura e aplicação de uma definição. Para ela, ao falar em compreensão matemática, devemos nos concentrar nos saltos, que se caracterizam como a troca qualitativa e significativa em relação ao conhecimento matemático na mente humana, referindo-se aos saltos de velhos para novos caminhos de saber.

Ao nos depararmos como uma nova forma de conhecimento há fatores que nos impedem de conhecê-las, e tais fatores são o que a autora denomina de “obstáculos epistemológicos”, caracterizados como algo comum em uma determinada cultura do presente ou do passado, e não como uma característica particular.



Para Sierpinska (1992), um obstáculo é superado quando há um distanciamento dos esquemas de pensamento ou crenças, e o indivíduo é capaz de visualizar as consequências ao considerar um ponto de vista diferente.

Sierpinska (1992) descreve dezesseis obstáculos epistemológicos para o ensino de funções, representados por “OE(f)”. Considerando nosso intuito de explorar apenas os obstáculos que surjam durante a aplicação de nossa intervenção, neste trabalho, exploraremos os obstáculos epistemológicos 1, 2, 8 e 9 da autora.

OE (f) -1: A Matemática não está preocupada com problemas práticos.

OE (f) -3: Tomar as dependências como fenômenos, focar em como as coisas mudam, ignorando o que muda.

OE (f) -8: Leis da Física e funções em Matemática não têm nada em comum, pertencem a diferentes domínios (compartimentos) de pensamento.

OE (f) -9: Proporção é um tipo privilegiado de relação.

Arelados aos 16 obstáculos, estão dezenove atos de compreensão, dos quais, para este artigo, discutimos dois, evidenciados no estudo piloto:

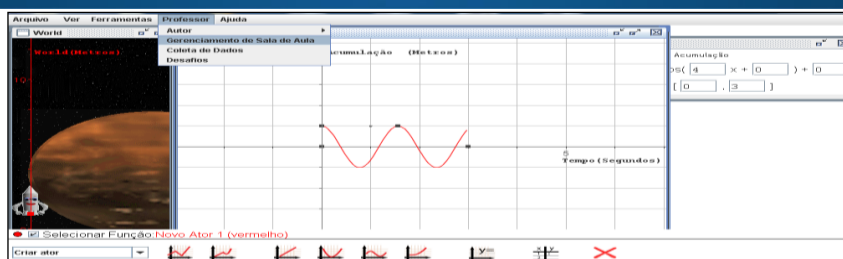
U(f) 2 - Há a identificação de regularidades nas relações entre as mudanças.

U(F) 19 - Discriminações entre as noções de relações funcionais e relações causais, ou seja, a situação posta contribui para a reflexão de relações causais.

### 3. O SimCalc

O Software SimCalc Math Worlds foi desenvolvido no Centro de Pesquisa e Inovação em Educação para Ciências Exatas, o KAPUT CENTER, da Universidade de Massachusetts Dartmouth (EUA), tendo como propósito democratizar o acesso ao trabalho matemático que lida com as variações, incluindo as ideias subjacentes ao Cálculo. As principais características desse software para nosso estudo são a *exploração de várias representações* (tabelas, gráficos, expressões de função, animações) simultaneamente, possibilitando uma álgebra dinâmica e interativa, e as *ferramentas de conectividade e gerenciamento de sala de aula*, que permitem que o professor escolha as representações a serem visualizadas pelos alunos (Figura 1).

A principal representação a ser utilizada em nossa pesquisa é a janela **Mundo**, na qual se explora o movimento do “Ator” (movimento de um personagem, que pode ser horizontal ou vertical, segundo uma função previamente escolhida).



**Figura 1:** Interface do SimCalc

Temos por hipótese que essas características, para além da construção do conceito de função, potencializarão também a construção e a organização das atividades que serão trabalhadas com os alunos.

#### 4. Atividades

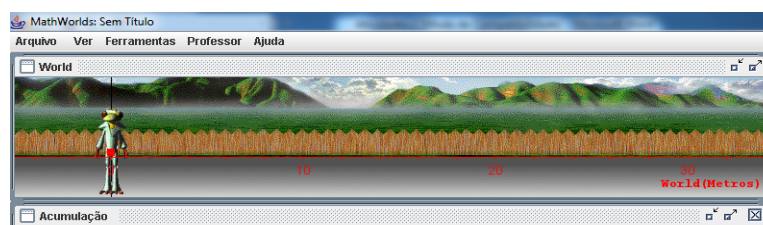
Neste artigo, discutimos o resultado de algumas atividades pertencentes a um estudo piloto de nossa pesquisa de doutorado que teve por objetivo testar as atividades elaboradas, a fim verificarmos a necessidade de possíveis ajustes para o estudo principal. Para isso, desenvolvemos as atividades em dois blocos. No Bloco 1, composto por duas atividades, temos por objetivo observar se o aluno identifica, mesmo que de maneira informal, a velocidade constante do movimento, no caso da Atividade 1, e não constante, no caso da Atividade 2, e de que maneira estabelece uma relação entre espaço e tempo nos dois casos.

O Bloco 2 é formado por duas atividades. Na primeira, o objetivo foi que o aluno discutisse os intervalos de crescimento das duas funções exploradas, observando que, no intervalo  $[0,6]$ , o ator que se movimenta segundo a função  $F(x) = 7x$  se desloca mais rápido do que o ator que se movimenta segundo a função  $F(x) = x^2$ , e que, no caso do intervalo  $]7, +\infty[$ , a situação é invertida, ou seja, a análise de quem estará na frente deverá levar em consideração o intervalo. Na Atividade 2, objetivamos fazer uma relação das atividades exploradas com uma situação do cotidiano, com o intuito de termos mais elementos para observar a discussão do aluno em relação à percepção de dependência explorada nas atividades anteriores.

Elas foram aplicadas a um aluno de 9º ano do Ensino Fundamental, fora do horário de aula, e os dados analisados foram coletados a partir de protocolos escritos do aluno. Sempre que o aluno iniciava uma atividade, apresentavam-se a ele as ferramentas do software que seriam necessárias para desenvolvê-la.



**Bloco 1-** Em cada atividade, foi solicitado que o aluno observasse o movimento realizado pelo ator, identificasse o espaço percorrido após um determinado tempo e o tempo decorrente para se percorrer uma determinada distância. Em um segundo momento, as perguntas foram similares, no entanto, em intervalos que não estavam disponíveis para a visualização na tela, com objetivo de observar se o aluno faria alguma generalização da correspondência entre espaço e tempo. Na Atividade 1 foi explorada a função  $F(x) = 7x$  no intervalo  $[0,6]$ . Foi postado para o aluno apenas a tela em que o ator se movimenta (Figura. 2), e apresentadas em uma folha as questões presentes no Quadro 1.



**Figura 2:** Ator segundo a função  $F(x) = 7x$

- A) Coloque o ator em movimento, observe e descreva como é esse movimento.  
B) Se o ator continuar caminhando, quantos metros ele terá caminhado após 13 segundos? Como você chegou a esta conclusão?  
C) Quanto tempo será necessário para ele caminhar 14 metros? Como você chegou a esta conclusão?  
D) E para caminhar 20 metros, quanto tempo será necessário? Justifique a sua resposta.  
E) Quanto tempo será necessário para ele caminhar 98 metros? Como você chegou a esta conclusão?

**Quadro 1:** Questões da Atividade 1 do Bloco 1

Na primeira questão, o aluno responde: “O ator anda em direção ao lado esquerdo dele, direito ao nosso. Anda em passos normais e leva seis segundos até o final do percurso”. Notamos que a resposta do aluno apresenta dois tipos de observação; inicialmente, ele se preocupa em descrever apenas o sentido do movimento realizado pelo ator, e posteriormente menciona o comportamento do ator, parecendo referir-se à velocidade dele, quando responde, “anda em passos normais”. Entendemos que por “passos normais” o aluno se refere ao fato de o movimento ter velocidade constante.

Na Questão (B) o aluno responde: “90 metros. Pois a cada 10 metros ele anda 1,44 segundos, fazendo a conta com 13 segundos ele ter (sic) andado mais ou menos 90 metros.” É possível notar que o aluno tenta fazer algum tipo de relação entre espaço percorrido e tempo. Não identifica explicitamente a função  $F(x) = 7x$ , mas chega a um resultado próximo do tempo necessário para se deslocar 10



metros, pela observação do movimento do ator. A resposta exata seria  $10/7$  (aproximadamente 1,428) o que levaria a um deslocamento de 91 metros após os 13 segundos. Para as Questões (C), (D) e (E), o aluno continua usando o mesmo raciocínio, gerado pela observação.

Nas respostas apresentadas, há indícios de identificação de regularidades nas relações entre as mudanças (U(f) 2, SIERPINSKA, 1992), e isto demonstra um potencial da atividade proposta ao lidar com o primeiro obstáculo “OE (f) – 1: A Matemática não está preocupada com problemas práticos” (SIERPINSKA, 1992) ou seja, a partir do movimento proposto (problema prático) o aluno é capaz de fazer uma relação com conceitos matemáticos que possui até então, para obter e apresentar uma resposta ao problema.

Na Atividade 2, foram feitos os questionamentos presentes no Quadro 2, para a função  $F(x) = x^2$  no intervalo  $[0,6]$ .

- |  |
|--|
| <p>A) Coloque o ator em movimento, observe e descreva como é esse movimento. Você(s) nota(m) alguma similaridade com o movimento do ator anterior? Se sim quais? Nota(m) diferenças? Se sim quais?</p> <p>B) Quanto tempo será necessário para ele atingir 16 metros? Como você chegou a essa conclusão?</p> <p>C) Quanto tempo será necessário para ele atingir 35 metros? Como você chegou a esta conclusão?</p> <p>D) Quanto tempo será necessário para ele atingir 144 metros? Como você chegou a esta conclusão?</p> <p>E) Quantos metros ele terá caminhado após 5 segundos? Justifique a sua resposta.</p> <p>F) Andando neste ritmo, é possível identificar quantos metros ele terá caminhado após 10 segundos? Como você chegou a esta conclusão?</p> |
|--|

**Quadro 2:** Questões da Atividade 2 do Bloco 1

Na primeira questão, o aluno responde: “*Ele anda para o mesmo lado do outro ator. Ele começa mais devagar depois acelera em pouco os passos. Não, sim, ele anda em tempo diferente do outro ator*”. Notamos que o aluno reconhece a diferença entre as acelerações dos dois movimentos, isto é, observa-se que o aluno, de forma espontânea, é capaz de reconhecer diferentes comportamentos de funções a partir de questionamentos que não abordam de forma específica conceitos de crescimento de uma função. Isso nos remete ao obstáculo OE(f) 1 descrito por Sierpinska (1992, p.31) “a matemática não está preocupada com problemas práticos”.

Na Questão (D), na qual era solicitado que o aluno pensasse em atingir um marco que não era possível visualizar na tela, notamos que o aluno, apesar de ter



reconhecido na Questão (A) que o ator apresentava um movimento diferente do ator da atividade anterior inclusive descrevendo que este aumentava o ritmo dos passos ao longo do percurso, usa a mesma relação de proporcionalidade para apresentar a sua resposta. O mesmo é observado na Questão (F). *“20,47 segundos, pois cada 6 segundos ele anda 36 metros, multiplicando por 3 ele anda 138 metros levando 18 segundos somando o que falta ao resultado”*.

Assim, emerge o obstáculo OE (f) - 9: “Proporção é um tipo privilegiado de relação” quando o aluno tenta usar a proporcionalidade para responder estas questões, mesmo tendo percebido diferenças nos movimentos dos atores.

**Bloco 2-** Para a Atividade 1 desse Bloco, ambos os atores das atividades anteriores foram apresentados simultaneamente, com os questionamentos do Quadro 3.

Olhando para o movimento simultâneo dos dois atores responda:

A) Qual dos atores atinge a marca de 30 metros primeiro? Justifique sua resposta.

B) Qual dos dois atores você acha que atingirá a marca de 60 metros primeiro? Justifique sua resposta.

C) Os dois atores se encontrarão em algum ponto? Se sim, quanto tempo será necessário para que eles se encontrem? Em que ponto eles se encontrarão?

D) Após 10 segundos de caminhada quem estará na frente? Justifique sua resposta.

E) O que você pode dizer sobre o movimento desses atores: Um deles sempre estará na frente? Se sim, qual deles? Por quê? Se não, descreva o que acontece.

**Quadro 3:** Questões da Atividade 1 do Bloco 2

Na primeira questão, o aluno responde: *“O ator 1, pois ele passou primeiro pelos 30 metros”*. Nota-se que a resposta está baseada apenas no que se pode observar na tela. Na Questão (B), o aluno responde: *“O Ator 1 pois ele é mais rápido que o 2”*. É interessante notar que, apesar de ter reconhecido anteriormente que o Ator 2 aumenta o ritmo ao longo do percurso, a visualização do movimento somente no intervalo de tempo  $[0,6]$ , em que o Ator 1 é mais rápido que o Ator 2, supera a hipótese anterior. O mesmo acontece nas respostas apresentadas para as questões seguintes.

A partir das respostas apresentadas, inferimos que o intervalo de tempo  $[0,6]$  não foi suficiente para que o aluno percebesse que, a partir de 7 segundos, o Ator 2 passaria a frente do Ator 1. Na tarefa anterior, observamos que o aluno apresentou dificuldades em estabelecer uma relação do espaço percorrido a partir do tempo de movimento no caso de uma situação de relação não proporcional, e desta maneira suas respostas se baseiam no movimento observado, e não no que ele pode concluir a partir dessa relação. Desta maneira concluímos que esta atividade ainda



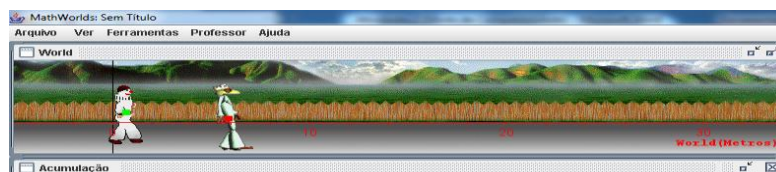
não foi suficiente para desestabilizar o conhecimento antigo, ou seja, a utilização apenas do pensamento proporcional e respostas baseadas apenas no visualizado em tela.

Para a Atividade 2, apresentamos o enunciado do Quadro 4.

2) Existem algumas estratégias para se realizar uma maratona.

Veja algumas estratégias destacadas em um estudo realizado na Escola de Educação Física e Esporte da Universidade de São Paulo. Neste estudo são apresentados quatro diferentes tipos de estratégias, conforme a distribuição da velocidade ao longo da prova:

a) Estratégia constante - o atleta mantém (ou altera pouco) a velocidade ao longo da prova; b) estratégia negativa ou decrescente - o atleta inicia a prova em alta velocidade e diminui ao longo da prova; c) estratégia positiva ou crescente - o atleta inicia a prova em velocidades baixa e aumenta gradualmente até o final; d) estratégias variáveis - a distribuição da velocidade não segue um padrão bem definido (CARMO et al., 2012, p.352). Suponha que os atores da Questão 1 estejam disputando uma maratona de 60 Km (Figura 5).



**Figura 5:** Atores 1 e 2

A) O que você diria sobre a estratégia de corrida de cada um deles? Tem alguma semelhança com as estratégias apresentadas no estudo da Escola de Educação Física e Esporte da Universidade de São Paulo? Neste caso, qual corredor terá mais sucesso, ou seja, vencerá a disputa? Justifique a sua resposta.

B) No caso de maratonas com outras distâncias (menores e maiores do que 60 km) a estratégia que foi considerada melhor para vencer a maratona de 60 km permanecerá sendo a melhor estratégia? O que você pensa sobre isto ao observar o movimento dos atores?

C) Devemos considerar que, no caso de uma maratona, outros fatores devem ser considerados, como, por exemplo, os limites fisiológicos de cada atleta. Se estas mesmas estratégias utilizadas por estes dois atores forem adotadas por atletas de verdade, quais serão os pontos positivos e os negativos de cada uma delas, dependendo da distância a se percorrer.

**Quadro 4:** Questões da Atividade 2 do Bloco 2

Na Questão (A) o aluno responde: *“Sim, pois o ator 1 usa a estratégia negativa ou decrescente, ele inicia a prova em alta velocidade e o ator 2 usa a estratégia positiva ou crescente, ele inicia a prova em velocidades baixas e aumenta gradativamente até o final. O ator 2 vencerá a disputa pois ele usa a estratégia, ele aumentará a velocidade até o final e o ator 1 vai diminuir a velocidade”*.

Essa resposta de fato demonstra como a inserção desta atividade foi importante, tendo em vista que a resposta foi dada a partir da leitura do texto sobre estratégias de corrida e por meio da visualização do movimento simultâneo dos mesmos dois atores trabalhados nas questões da Atividade 1 do Bloco 2, cuja





resposta do aluno indica que o Ator 1 estaria sempre na frente, e nesta já afirma que o Ator 2 vencerá a prova.

Esta observação nos remete ao primeiro obstáculo descrito por Sierpinska (1992), ou seja, há uma dificuldade de se reconhecer uma atividade do “mundo” como sendo matemática. Praticamente a mesma situação anterior em um contexto cotidiano deu liberdade para uma resposta que nos parece mais espontânea.

Esta resposta também nos remete ao obstáculo OE (f) 8 - “Leis da física e funções em Matemática não têm nada em comum; pertencem a diferentes domínios de pensamento” e, desta forma, entendemos que esta questão colabora para o alcance do ato de compreensão para superar tal obstáculo U (f) 8 - “Síntese dos conceitos de lei e de função; em particular, estar ciente da possibilidade de utilizar funções para modelar relações entre magnitudes físicas ou outras”.

Na Questão (B) a resposta do aluno foi: *“No caso de menores distâncias o ator 1 ganhe a maratona, pois ele mantém uma distância grande entre um e outro no vídeo. No caso de maiores distâncias talvez a estratégia que foi considerada a melhor permanecerá sendo a melhor estratégia”*. Entendemos que, nesta resposta o aluno parece ter a percepção de que, em outros intervalos de observação, os comportamentos das duas funções são diferentes.

Na Questão (C), o aluno responde: *“Se um atleta não tem preparação física, o limite psicológico for baixo, talvez seja um ponto negativo adotar a estratégia crescente, pois ele já pode estar cansado quando for aumentar a velocidade mais (sic) talvez seja um ponto positivo adotar a estratégia constante. Um atleta que tem um limite psicológico maior talvez seja melhor adotar a estratégia crescente, mas a estratégia decrescente ainda pode ser um ponto negativo”*.

Nesta questão, notamos a presença do ato de compreensão U(F) 19 - “Discriminações entre as noções de relações funcionais e relações causais”, ou seja, a situação posta contribuiu para a reflexão das relações causais.

## 5. Considerações Finais

Notamos que, na Atividade 1 do Bloco 1, o aluno, mesmo sem reconhecer a função que descreve o movimento do ator, é capaz de fazer relações espaço-tempo a partir do movimento observado. Isso nos leva a concluir que a atividade do modo como foi apresentada contribuiu para o reconhecimento do papel da Matemática na resolução de problemas práticos, uma vez que o aluno é capaz de partir do



problema apresentado, procurar conceitos matemáticos para a resolução do mesmo e apresentar a resposta solicitada.

Na Atividade 2 deste mesmo Bloco, observamos o aparecimento de um obstáculo: a questão da proporcionalidade, que parece impedi-lo de abandonar esta forma de pensar para desenvolver um pensar “novo”.

No Bloco 2, o aluno apresentou dificuldades em reconhecer que, a partir de um determinado intervalo de tempo, o Ator 2 passaria à frente do Ator 1. No entanto, notamos, nas respostas apresentadas na Atividade 2 que, quando o aluno foi posto a pensar em uma situação real, ele passa a reconhecer esta característica.

Esta identificação nos revela que de fato reconhecer a matemática como uma ciência que resolve problemas práticos é um obstáculo a ser superado e esta atividade se mostra importante para a superação de tal obstáculo.

Concluimos desta maneira, que as atividades exploradas demonstram uma desestabilização do “velho conhecimento”, dando margem à discussão de novas formas de conhecimento no que se refere ao conceito de função, e, desta maneira, contribuindo para a construção deste conceito na perspectiva de Sierpinska (1992).

A fim de potencializar esta desestabilização, julgamos importante algumas alterações neste bloco de atividades, a saber: 1) reformulação da Atividade 2 do Bloco 2, na qual exploraremos uma disputa com a distância em metros e não em quilômetros; e 2) inserção de uma nova atividade que propicie a simulação no software desta disputa em um intervalo de tempo maior que 7 segundos e coloque os alunos a rediscutir as respostas apresentadas nas questões anteriores.



## 6. Referências

BENEDETTI, F. C. **Funções, Software gráfico e Coletivos Pensantes**. 316f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2003.

BORBA, M. C. **Coletivos seres-humanos-com-mídias e a produção de Matemática**. In Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática, 2002.

CARMO, E. C, et al. **Estratégia de corrida em média e longa distância: como ocorrem os ajustes de velocidade ao longo da prova?:** Rev. bras. Educ. Fís. Esporte. São Paulo, v.26, n.2. p.351-363, 2012.

SCANO, F. C. **Função Afim: Uma sequência didática envolvendo atividades com o Geogebra**. 2009. 151 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

SIERPINSKA, A. **On Understanding the Notion of Function**. Mathematical Association of America, United States of America, v. 25, p. 25-58, 1992.